第 3 章　矩阵的初等变换

3.1　初等变换与矩阵的秩

3.1.1　矩阵的初等变换

定义 3.1　矩阵的下列 3 种变换称为矩阵的初等行变换：

（1）交换矩阵的两行（交换 i 、 j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ）.

（2）以一个非零的数 k 乘以矩阵的某一行（第 i 行乘以数 k ，记作 $r_i \times k$ ）.

（3）把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行（第 j 行乘以 k 加到 i 行，记为 $r_i + kr_j$ ）.

把定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的初等列变换的定义（相应记号中把 r 换成 c ）. 初等行变换与初等列变换统称为初等变换.

注意：当我们对一个矩阵 A 进行初等变换，得到另一个矩阵 B 时，矩阵 A 和 B 同型，但一般 A 和 B 不相等，记为 $A \to B$ ，

如：$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

初等变换连续进行，记为 $A \to B \to C$ ，

如：$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

易见，若对矩阵 A 作初等变换得到矩阵 B ，则 B 也可经由同类型的逆变换得回矩阵 A . 变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换即为其本身；变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times {}^{1}\!/_{k}$ ；变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i - kr_j$ 或 $r_i + (-k)r_j$.

3.1.2　矩阵的等价

定义 3.2　若矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B ，则称矩阵 A 与 B 等价，记为 $A \sim B$.

如上例中，$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

例 3.1 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$，当 a 取何值时，可以使得 A 与 B 等价？

解：矩阵 B 中，第 2 行为零行.

若 $A\sim B$，则需对 A 进行初等变换，在变换后的矩阵中产生零行.

矩阵 A 中没有零行，从而交换 A 的两行（列），或是让 A 的某一行（列）乘非零数 k，都不会在新矩阵中产生零行．只有对 A 进行第 3 种形式的行变换：把 A 的某一行的 k 倍加到另一行上，才有可能在变换后的新矩阵中产生零行.

设把 A 的第 1 行的 k 倍加到第 2 行上，即 $\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\3+k&a+2k\end{pmatrix}$，令第 2 行为零行，则有 $3+k=0$，$a+2k=0$，得 $k=-3$，$a=6$，此时即有 $A\sim B$.

注意：此时 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$，第 1 行和第 2 行的对应元素成比例．一般情况下，对于一个原来没有零行的矩阵，只有当矩阵中存在（或可以产生）成比例的两行时，对于这两行进行第 3 种形式的行变换，才能在变换后的矩阵中产生零行.

定义 3.3 左上角是一个单位矩阵，其余元素全为 0 的矩阵称为标准形矩阵.

如：$F_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，$F_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$都是标准形矩阵.

利用分块矩阵形式，一个一般的 $m\times n$ 标准形矩阵可表示为

$$F=\begin{pmatrix}E_r&O_{r\times(n-r)}\\O_{(m-r)\times r}&O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},$$

其中子块 E_r 为 r 阶单位阵，$r\leqslant\min(m,n)$，其余子块全为零矩阵.

作为例 3.1 的推广，我们有以下的结论：

两个同型标准形矩阵，若 r 值不同，则不等价．例如上面所给出的 F_1 与 F_2，就是不等价的（证明略).

矩阵之间的等价关系具有下列基本性质：

（1）反身性：$A\sim A$.

以数 1 乘 A 的某一行，即有 $A\sim A$.

（2）对称性：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$.

矩阵的初等变换是可逆的，所以若有 $A\sim B$，也必有 $B\sim A$.

（3）传递性：若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

若矩阵 A 可经过有限次初等变换变成 B，B 可经过有限次初等变换变成 C，显然 A 可经过有限次初等变换变成 C，从而 $A\sim C$.

3.1.3 利用初等变换将矩阵化为标准形

对于任意给出的$m\times n$矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，我们总可以对$A$进行有限次初等变换，将$A$化为标准形矩阵．具体步骤如下：

（1）用初等行变换，将A化为行阶梯形矩阵．

① 设$a_{11}\neq 0$，把第 1 行的k倍加到第 2 行上，易见，令$k=-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$，可使第二行的第 1 个元素变为 0．采取同样的方式，可将a_{11}下方的所有元素化为 0．得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

若$a_{11}=0$，我们可以在第 1 列中找一个非零元素（不妨设为a_{i1}），通过交换第 1 行和第i行，将非零元a_{i1}换到原来a_{11}的位置上，再进行以上步骤．

② 对于$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$部分，按 ① 中的方式，将$a'_{22}$下方的所有元素化为 0.

依此类推，可将A化为行阶梯形矩阵．

例如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ -1 & -2 & 5 & 11 & 15 \\ 3 & 6 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

这一步的目的是要把a_{11}下方的元素化为 0，但有时候可能会碰巧地将a_{12}下方的元素也都化为了 0，这时对于剩余的部分$\left(\begin{array}{c|ccc} \hline & 3 & 6 & 9 \\ & 6 & 12 & 17 \\ & 3 & 5 & 7 \end{array}\right)$进一步化简，将第 2 行的第 1 个非零元——“3”下面的元素化为 0：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-2r_2\\ r_4-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

此时剩余部分为$\left(\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 0 & -1 \\ & -1 & -2 \end{array}\right)$，若左上角元素为 0，需要通过换行的方式使这个位置的元素不为 0，以便进一步化简，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这一步已经化为了行阶梯形矩阵.

（2）用初等行变换，将行阶梯形矩阵化为行最简形矩阵.

① 每一行乘以一个倍数，将各非零行的首非零元都化为 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \times (-1)]{r_2 \times \frac{1}{3} \atop r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② 将各非零行的首非零元所在列上的其余元素都化为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_1 - 2r_4 \atop r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_3 \atop r_2 - 2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这一步在形式上是很简单的，但是一定要清楚在这一步用到了哪些行变换.

此时得到的行阶梯形矩阵进一步满足：

1）各非零行的首非零元都是 1.

2）每个首非零元所在列的其余元素都是 0.

则称其为行最简形矩阵.

（3）用初等列变换，将行最简形矩阵化为标准形矩阵.

所谓行最简形矩阵，指的是只用初等行变换能将矩阵化为的最简形式．若将行最简形矩阵进一步化为标准形矩阵，就必须要用到初等列变换．首先对于每一非零行，将首非零元之外的其余元素都化为 0；再通过交换列，使每一非零行的首非零元组成一个单位阵即可.

如$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{换列}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

由此即得：

定理 3.1 任意一个矩阵 A，总可以经过有限次初等变换化为标准形矩阵（简称为 A 的标准形）.

显然，矩阵 A 与其标准形是等价的.

对于一个矩阵 A 进行一系列的初等变换之后，设所得矩阵为 B. 一般来说，A、B 是不同的矩阵，即 $A \neq B$，但按矩阵等价的概念，有 $A \sim B$. 设 A 的标准形为 F_A，B 的标准形为 F_B， 由等价关系的传递性， $F_A \sim F_B$. 再由标准形矩阵等价的条件，必有 $F_A = F_B$. 即得：对于一个矩阵 A 进行初等变换，其标准形是不会变的．或者说，等价的矩阵有相同的标准形，这就是矩阵等价关系的实质所在.

3.1.4 矩阵的秩

以上我们看到，任意一个矩阵 A，首先可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵，其次化为行最简形矩阵，最后用初等列变换化为标准形矩阵．即

$$A \xrightarrow[\text{步骤1}]{\text{行变换}} \text{行阶梯形} \xrightarrow[\text{步骤 2}]{\text{行变换}} \text{行最简形} \xrightarrow[\text{步骤 3}]{\text{列变换}} \text{标准形}.$$

在这个过程中，我们应该注意到一个重要的特征．步骤 1 中，当用初等行变换把矩阵 A 首先化为行阶梯形矩阵之后，我们把行阶梯形矩阵中非零行的行数设为 r. 步骤 2 中，在行阶梯形矩阵的基础上进一步化为行最简形矩阵，从化简的方式容易看到，行最简形矩阵中非零行的行数也是 r. 步骤 3 中，把行最简形矩阵用列变换化为标准形矩阵，从化简的方式也容易看到，标准形矩阵中的非零行的行数仍然还是 r. 而且这时还有一个更为明显的标志，就是标准形矩阵左上方的单位阵的阶数也是 r. 我们把这个数值 r 称为矩阵的秩.

定义 3.4 对于一个 $m \times n$ 矩阵 A，设其标准形矩阵为 $F_A = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$，称数值 r 为矩阵 A 的秩，记为 $R(A) = r$.

由于对一个矩阵进行初等变换，其标准形是不会变的．因此，初等变换不会改变矩阵的秩．我们把矩阵的秩称为矩阵在初等变换之下的不变量．以矩阵等价

的角度来说，亦即：若 $A \sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

对于零矩阵 O，我们规定 $R(O)=0$.

对于一个一般的 $m\times n$ 矩阵 A（非零矩阵），显然有 $1\leqslant R(A)\leqslant \min(m,n)$.

若 $m\times n$ 矩阵 A 的标准形矩阵为 $F_A=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$，考虑矩阵 A 的转置矩阵 A^{T} . A 的行变换与 A^{T} 的列变换对应，A 的列变换则与 A^{T} 的行变换对应. 因此 $n\times m$ 矩阵 A^{T} 的标准形矩阵为 $F_A{}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{pmatrix}$，有 $R(A)=R(A^{\mathrm{T}})$.

例 3.2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ -1 & -2 & 5 & 11 & 15 \\ 3 & 6 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$的秩.

解：在前面“利用初等变换将矩阵化为标准形”的内容中，我们已看到，矩阵 A 的标准形为 $F_A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，此时即有 $R(A)=4$.

我们前面已经看到，在把矩阵化为标准形时，首先化为行阶梯形矩阵，由于此时非零行的行数 r 也就是最终的标准形中左上方的单位阵的阶数 r，因此当我们需要求一个矩阵的秩时，实际上只需将其用化为行阶梯形矩阵即可. 此时行阶梯形矩阵中非零行的行数即为矩阵的秩.

按照此求秩方法，对于分块矩阵 $(A\ B)$，当我们将 $(A\ B)$ 化为行阶梯形矩阵之后，同时也将分块矩阵 $(A\ B)$ 中左边部分的 A 化为了行阶梯形矩阵. 由于 A 的行阶梯形只是整个分块矩阵 $(A\ B)$ 的行阶梯形的左边部分，从而显然有 $R(A)\leqslant R(A\ B)$.

另外，由于在将分块矩阵 $(A\ B)$ 化为行阶梯形矩阵的过程中，只用到了行的变换，所以若将 $(A\ B)$ 中的列交换位置，对于 $(A\ B)$ 所化的行阶梯形矩阵中的非零行数是不会有影响的，从而有 $R(A\ B)=R(B\ A)$.

例 3.3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$的秩.

解：对 A 作初等行变换，将其化为行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-\frac{5}{4}r_2]{r_3-\frac{3}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得 $R(A)=3$.

在整个过程中进行了两次交换行的变换，其目的只是为了使下面的变换过程在运算上简单一些，并不是必须要进行的，读者可尝试不做这两次交换行的变换来完成化行阶梯形矩阵的过程.

注意：对于矩阵 A，如果我们用不同的行变换来化简，得到的行阶梯形矩阵可以是不同的矩阵，但非零行的行数总是相同的，即求得的 A 的秩是相同的.

对于一个 $m\times n$ 矩阵 A，如果 $R(A)=m$，则称 A 为行满秩矩阵；如果 $R(A)=n$，则称 A 为列满秩矩阵．如例 3.2 中的矩阵即为行满秩矩阵.

当 A 为 n 阶方阵时，如果 $R(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵；如果 $R(A)<n$，则称 A 为降秩矩阵.

3.2 初等矩阵

对于两个等价的矩阵 $A\sim B$，一般 $A\neq B$．利用初等矩阵，可以在 A、B 之间建立等式联系，进而解决一些与矩阵有关的问题（例如求方阵的逆阵）.

3.2.1 初等矩阵

定义 3.5 对单位矩阵 E 进行一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

3 种初等变换分别对应着 3 种初等矩阵：

（1）E 的第 i、j 行（列）互换得到的矩阵

$$E(i,j)=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{——}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \text{——}j\text{列} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{matrix} & & & i\text{列} & & & & j\text{列} & & & \end{matrix} &
\end{array}$$

（2）E 的第 i 行（列）乘以非零数 k 得到的矩阵

$$E(i(k))=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & k & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{——}i\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{matrix} & & i\text{列} & & \end{matrix} &
\end{array}$$

（3）E 的第 j 行乘以数 k 加到第 i 行上，或 E 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上得到的矩阵

$$E(ij(k))=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \text{——}i\text{行} \\ \\ \text{——}j\text{列} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{matrix} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{matrix} &
\end{array}$$

容易验证，对于 3 种初等矩阵，有

$$|E(i,j)|=-1;\quad |E(i(k))|=k;\quad |E(ij(k))|=1.$$

从而 3 种初等矩阵都是可逆的，且有

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);\quad E(i(k))^{-1}=E(i(k^{-1}));\quad E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k)).$$

即初等矩阵的逆阵仍为初等矩阵.

初等矩阵是通过对单位矩阵 E 进行一次初等变换（可以是行变换，也可以是

列变换）而产生的．我们可以把初等矩阵和用来产生这个初等矩阵的初等行变换及初等列变换对应起来．例如：

初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$对应的行变换是$r_2 \leftrightarrow r_3$，对应的列变换是$c_2 \leftrightarrow c_3$；

初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$对应的行变换是$r_3 \times k$，对应的列变换是$c_3 \times k$；

初等矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$对应的行变换是$r_2 + kr_3$，对应的列变换是$c_3 + kc_2$．

一个矩阵A，若左乘一个初等矩阵P，则相当于对A进行了一次P所对应的初等行变换，如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$

相当于 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$

而矩阵A右乘一个初等矩阵P，则相当于对A进行了一次P所对应的初等列变换，如

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & kb+c \\ d & e & ke+f \end{pmatrix}$$

相当于 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 + kc_2} \begin{pmatrix} a & b & kb+c \\ d & e & ke+f \end{pmatrix}$.

容易验证，一般情况下这个性质也是成立的．此性质可以表述为如下的定理：

定理 3.2 设A是一个$m \times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于用对应的m阶初等矩阵左乘A；对A施行一次初等列变换，相当于用对应的n阶初等矩阵右乘A.（证明略）

对于矩阵A，设其经由t个初等行变换、s个初等列变换后化为了标准形F，设t个初等行变换所对应的初等矩阵为$H_1, H_2, \cdots, H_t$，s个初等列变换所对应的初等矩阵为$L_1, L_2, \cdots, L_s$，则$A \to \cdots \to F$的变换过程可以等价地表示为

$$H_t \cdots H_2 H_1 A L_1 L_2 \cdots L_s = F$$

当A为n阶可逆方阵时，因初等矩阵都可逆，从而其标准形F也必可逆.

设 $F=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$，若 $n-r>0$，则 $|F|=0$，F 不可逆，

从而必有 $n-r=0$，即 $F=E_n$．由此即得以下定理：

定理 3.3　n 阶方阵 A 可逆的充要条件是：A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

证明：（充分性）

若 $A=P_1P_2\cdots P_k$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 为初等矩阵，由初等矩阵都可逆，可得其乘积 A 也可逆.

（必要性）

若 A 可逆，则 A 的标准形必为单位矩阵 E，且有

$H_t\cdots H_2H_1AL_1L_2\cdots L_s=E$，其中 H、L 为初等矩阵.

由于初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵，从而

$$A=H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_t^{-1}EL_s^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}=H_1^{-1}H_2^{-1}\cdots H_t^{-1}L_s^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1},$$

即 A 可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

由定理 3.3，可以给出求逆矩阵的初等变换法.

3.2.2　求逆矩阵的初等变换法

对于可逆的 n 阶方阵 A，其逆阵 A^{-1} 也可逆.

由定理 3.3，设 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_k$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 为初等矩阵，

此时，有 $E=A^{-1}A=P_1P_2\cdots P_kA$　　　　（1）

及 $A^{-1}=P_1P_2\cdots P_kE$.　　　　（2）

（1）式可理解为对于单位矩阵 A，进行了若干个初等行变换，把 A 化为了单位阵 E.

（2）式可理解为对于单位矩阵 E，进行了相同的初等行变换，把 E 化为了 A^{-1}.

因此，求方阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 时，可构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\quad E)$，然后对其施以初等行变换将 A 化为单位矩阵 E，则上述初等行变换同时也将其中的 E 化为了 A^{-1}，即

$$(A\quad E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\quad A^{-1})$$

这就是求逆矩阵的初等变换法.

例 3.4　对于第 2 章例 2.22 中的方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，用初等变换法求其逆阵.

解： $(A\ E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&0&1&0&0\\-2&1&1&0&1&0\\2&-1&4&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\-2&1&1&0&1&0\\2&-1&4&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&1&\frac{2}{3}&1&0\\0&-\frac{1}{3}&4&-\frac{2}{3}&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&1&\frac{2}{3}&1&0\\0&0&5&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&1&\frac{2}{3}&1&0\\0&0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0&2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right),$$

即得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

注意：在将 A 化为单位矩阵 E 时，只能用初等行变换，步骤是：首先将 A 化为行阶梯形矩阵，再化为行最简形矩阵（A 可逆时其行最简形矩阵就是单位阵 E）.

3.3 行列式观点下矩阵秩的定义

对于矩阵的秩也可以从行列式的角度来给出如下的定义：

定义 3.6 在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列（$1\leqslant k\leqslant m$，$1\leqslant k\leqslant n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

注：$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，当 $A=O$ 时，它的任何子式都为 0．当 $A\neq O$ 时，它至少有一个元素不为 0，即它至少有一个一阶子式不为 0．再考察二阶子式，若 A 中有一个二阶子式不为 0，则往下考察三阶子式，如此进行下去，最后必得到 A 中有 r 阶子式不为 0，而再没有比 r 更高阶的不为 0 的子式．这个不为 0 的子式的最高阶数 r 即为行列式观点下矩阵秩的定义.

定义 3.4′ 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，如果存在 A 的 r 阶子式不为 0，而任何 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）皆为 0，则称数 r 为矩阵 A 的秩，记为 $R(A)$，并规定零矩阵的秩等于 0.

在此定义之下，矩阵的秩具有如下性质：

定理 3.4 若矩阵 $A\sim B$，则 $R(A)=R(B)$.

证明：

（1）设矩阵 A 经过一次初等行变换变为 B，此时 A 中的一个子式 D_A 在 B 中都有一个对应子式 D_B，两个子式的元素相同，但元素之间的相对位置则可能相同（如果对 A 进行的初等行变换没有涉及 D_A 中的元素），也可能不同（如果对 A 进行的初等行变换涉及了 D_A 中的元素）.

设 $R(A)=r$，则 A 中存在某个 r 阶子式 $D_A\neq 0$，若 A 是经过变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 变为 B，设 D_A 在 B 中的对应子式为 D_B，由行列式性质，有 $D_B=D_A$，或 $D_B=-D_A$，都有 $D_B\neq 0$.

若 A 是经过变换 $r_i\times k$ 变为 B（k 不为 0），设 D_A 在 B 中的对应子式为 D_B，由行列式性质，有 $D_B=D_A$ 或 $D_B=kD_A$，都有 $D_B\neq 0$.

若 A 是经过变换 r_i+kr_j 变为 B，设 D_A 在 B 中的对应子式为 D_B，若 D_A 中不含 A 的第 i 行的元素，则 $D_B=D_A\neq 0$，若 D_A 中同时含 A 的第 i 行和第 j 行的元素，仍有 $D_B=D_A\neq 0$，若 D_A 中含 A 的第 i 行的元素，但不含 A 的第 j 行的元素，则由行列式的性质 2.4，$D_B=D_A+kD_A'$，D_A' 也是 A 中的一个 r 阶子式，其中不含有 A 的第 i 行的元素，若 $D_A'=0$，则 $D_B=D_A\neq 0$，若 $D_A'\neq 0$，则由于 D_A' 中不含有 A 的第 i 行的元素，设 D_A' 在 B 中的对应子式为 D_B'，则有 $D_B'=D_A'\neq 0$.

综合以上各种情况，若矩阵 A 中存在一个 r 阶非零子式，对 A 进行一次初等行变换得到矩阵 B，在矩阵 B 中也必定可找出一个 r 阶非零子式.

对于矩阵 A 进行一次初等列变换得到矩阵 B 的情形，只需将以上证明过程中的“行”换为“列”即可.

由此即得：$R(A)\leqslant R(B)$.

因为矩阵 B 也可由逆变换得回 A，同样有 $R(B)\leqslant R(A)$．从而 $R(A)=R(B)$.

即得：一次初等变换不改变矩阵的秩.

（2）设矩阵 A 经过一系列初等变换变为矩阵 B，因为每一次初等变换都不改变矩阵的秩，从而 $R(A)=R(B)$.

对于一个 $m\times n$ 矩阵 A，若将矩阵 A 经过一系列初等变换化为标准形

$$F_A=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

F_A 中有唯一的一个 r 阶子式 $E_r\neq 0$，而所有 $r+1$ 阶子式都为 0，从而按照定义3.4′，即有 $R(F_A)=r$，再由定理 3.4，即得 $R(A)=R(F_A)=r$．这与我们之前按照定义 3.4 给出的秩的定义 $R(A)=r$ 是相同的．

习题三

1．把下列矩阵化为行最简形矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$．

2．从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B，则 A、B 的秩有何关系？

3．求作一个秩是 4 的方阵，它的两个行向量是 $(1,0,1,0,0)$ 和 $(1,-1,0,0,0)$．

4．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5．试利用矩阵的初等变换求下列方阵的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6．（1）设 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，求 X 使 $AX=B$.

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，求 X 使 $XA=B$.