第三章　线性方程组

自然科学、工程技术和经济管理中的许多问题在研究中归结为求解一个线性方程组．在第一章中我们介绍了克莱姆法则，但它只适用于线性方程组中方程个数与未知量个数相等，并且其系数行列式不等于零的情形，这时线性方程组有唯一一组解．但是，如果其系数行列式等于零，方程组如何求解？若方程组的方程个数与未知量个数不相等，其解又是如何？解决这些问题，我们需要另辟蹊径．

例 1　一个木工、一个电工、一个油漆工，三人相互同意彼此装修他们自己的房子．在装修之前，他们达成了如下协议：①每人总共工作十天（包括给自己家干活在内）；②每人的日工资根据一般的市价在 60～80 元之间；③每人的日工资数应使得每人的总收入与总支出相等．表 3-1 是他们协商后制定出的工作天数的分配方案 ．试确定每人的日工资．

表 3-1

	木工	电工	油漆工
在木工家的工作天数	2	1	6
在电工家的工作天数	4	5	1
在油漆工家的工作天数	4	4	3

解　设木工、电工、油漆工的日工资分别为 x_1, x_2, x_3，由题意，得方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 10x_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 10x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10x_3 \end{cases},$$

整理得

$$\begin{cases} -8x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases},$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

虽然方程个数与未知量个数相等，但是系数行列式 $D = 0$，克莱姆法则失效．

例 2　图 3-1 给出了某城市部分单行街道的交通流量（每小时通过的车辆数）．

图中有 6 个路口，已有 9 条街道记录了当天的平均车流量．另有 7 处的平均车流量未知．试利用每个路口的进出车流量相等关系推算这 7 处的平均车流量．

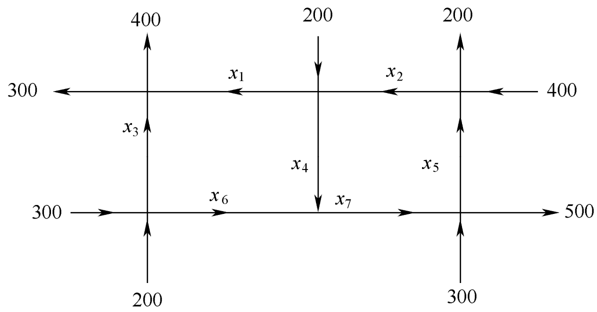

图 3-1

解　由题意，得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 300 + 400 \\ x_1 + x_4 = x_2 + 200 \\ x_5 + 400 = x_2 + 200 \\ x_3 + x_6 = 200 + 300 \\ x_4 + x_6 = x_7 \\ x_7 + 300 = x_5 + 500 \end{cases},$$

整理得

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 700 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 200 \\ x_2 - x_5 = 200 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ x_4 + x_6 - x_7 = 0 \\ -x_5 + x_7 = 200 \end{cases}.$$

有 6 个方程，7 个未知量，二者数量不相等，克莱姆法则失效.

以上两例均无法用克莱姆法则求解. 我们将在本章第四节解决.

本章将首先讨论 n 维向量组的线性相关性、向量组的极大无关组及向量组秩的概念，接着运用向量和矩阵的知识，对线性方程组的一般情形——有 n 个未知数、m 个方程的线性方程组，解决以下三个问题：如何判定线性方程组是否有解？在有解的情况下，解是否唯一？在解不唯一时，解的结构如何？

第一节　n 维向量及其线性关系

为了对线性方程组的内在联系和解的结构等问题作出进一步讨论，引进 n 维向量及与之有关的概念，这些概念也是学习线性代数其它有关内容的重要工具.

一、n 维向量

1. n 维向量的概念

定义 1　由 n 个数组成的一个 n 元有序数组

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为一个 n 维向量，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

向量一般用小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\cdots$ 等表示.

定义 1 中的 α 称为行向量，向量有时也可用下面的列向量形式给出

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}.$$

分量均为零的向量，称为零向量，记作 $\mathbf{0}$，即

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0).$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 各分量的相反数所构成的向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$，即

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n).$$

易知 $1\times n$ 矩阵可以看作 n 维行向量，而 $n\times 1$ 矩阵可以看作 n 维列向量.

2．n 维向量的运算

（1）向量相等.

定义 2 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$，如果它们的对应分量相等，即 $a_i=b_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

（2）向量的和与差.

定义 3 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$，则称向量 $\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

将 $\boldsymbol{\alpha}+\left(-\boldsymbol{\beta}\right)$ 写作 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n).$$

设有 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$，根据定义 3，容易验证向量的加法满足以下基本性质：

① $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

② $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

③ $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

④ $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

（3）数乘向量.

定义 4 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$k$ 为一实数，则向量 $(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$ 称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘积，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots ka_n).$$

设 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量，k、l 均为实数，根据定义 4 容易验证向量的数乘满足：

（1）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

（2）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

（3）$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

（4）$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-2,1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,2,-3)$，求 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}$.

解 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=3(3,-2,1,-1)+4(1,1,2,-3)$

$=(9,-6,3,-3)+(4,4,8,-12)$

$=(13,-2,11,-15)$.

例 2 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,-2)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-2,3)$，且 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$.

解 由 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=3\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\alpha}\\&=3(1,-2,3)-2(2,1,-2)\\&=(3,-6,9)-(4,2,-4)\\&=(-1,-8,13).\end{aligned}$$

例 3 将线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\end{cases} \tag{3.1}$$

写成向量方程的形式.

解 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

则线性方程组的向量的形式为

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}x_2+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}x_n=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{\beta}.$$

二、向量组的线性相关性

向量之间除以上运算关系外还存在其他关系，其中最主要的是向量组的线性相关与线性无关．为了给出这两个概念，先介绍线性组合与线性表示.

1．线性组合与线性表示

定义 5 设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若有一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以写成如下形状

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是数，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

例 4　设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,5,-1),\boldsymbol{\beta}=(-1,3,3,-1)$, 因为

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合．$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示．

例 5　二维向量组$\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1)$称为二维基本（单位）向量组．任意一个二维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$都可由$e_1,e_2$线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1e_1+\boldsymbol{\alpha}_2e_2.$$

例 6　设零向量$\mathbf{0}=(0,0,0)$及$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-5,-3)$．因为

$$\mathbf{0}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以向量$\mathbf{0}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合．

实际上，零向量是任意一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合，或者说零向量可由任一向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示．

例 7　设有$\boldsymbol{\beta}=(1,-5,2),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,1)$，问$\boldsymbol{\beta}$能否表成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合？若能，写出具体表示式．

解　设$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为数．

则

$$\begin{aligned}(1,-5,2)&=k_1(1,-1,2)+k_2(1,1,1)+k_3(0,2,1)\\&=(k_1,-k_1,2k_1)+(k_2,k_2,k_2)+(0,2k_3,k_3)\\&=(k_1+k_2,-k_1+k_2+2k_3,2k_1+k_2+k_3).\end{aligned}$$

由向量相等定义，可得方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=1\\-k_1+k_2+2k_3=-5\\2k_1+k_2+k_3=2\end{cases},$$

解该线性方程组（用消元法或克莱姆法则）得

$$\begin{cases}k_1=2\\k_2=-1\\k_3=-1\end{cases},$$

所以

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

即$\boldsymbol{\beta}$能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合．

从例 7 可以看出，线性表示的问题可以归结为求解一个线性方程组的问题．反之，判断一个线性方程组是否有解的问题也可以归结为向量的线性组合问题．

如例 3，方程组改写成向量的形式

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{\beta},$$

线性方程组是否有解，等价于向量$\boldsymbol{\beta}$能否表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合．反之，若$\boldsymbol{\beta}$能用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$唯一地表示出来，则方程组有唯一解（见例 4）；若$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$用多种形式表示，则方程组有多组解．

但需要注意的是，并非每一个向量都可以表示为某几个向量的线性组合．比如向量（–1，2）就不能用向量（–3，0）及（1，0）的线性组合来表示．因为对于任意的一组数k_1,k_2，有

$$k_1(-3,0)+k_2(1,0)=(-3k_1+k_2,0)\neq(-1,2)$$

2．线性相关与线性无关

定义 6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量，如果存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；否则，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 亦即仅当 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都等于零时，上式才成立，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例如，对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(4,1,-3),\boldsymbol{\alpha}_2=(-8,-2,6),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,7,1)$，由于有 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，这里，$k_1=2,k_2=1,k_3=0$ 是不全为零的数，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的.

例 8 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,5)$$

的线性相关性.

解 设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

即

$$k_1(1,1,1)+k_2(2,0,4)+k_3(3,1,5)=(0,0,0),$$

得方程组

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=0\\ k_1\qquad\quad +k_3=0\\ k_1+4k_2+5k_3=0\end{cases},$$

由于方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&1\\1&4&5\end{vmatrix}=0$，方程组有非零解，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

如果向量组所含向量个数与向量维数不等，就不能用行列式来判断，而用消元法求解对应的方程组也是比较繁琐的. 在下一节中，我们将给出用矩阵初等变换判断向量组的线性相关性的方法，计算起来就简单多了.

形如

$$\begin{cases}e_1=(1,0,0,\cdots,0)\\ e_2=(0,1,0,\cdots,0)\\ \qquad\vdots\\ e_n=(0,0,0\cdots,1)\end{cases}$$

的向量组称为 n 维基本向量组.

例 9 试证明 n 维基本向量组线性无关.

证 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}.$$

相应的线性方程组为

$$\begin{cases}k_1+0k_2+\cdots+0k_n=0\\ 0k_1+k_2+\cdots+0k_n=0\\ \qquad\vdots\\ 0k_1+0k_2+\cdots+k_n=0\end{cases},$$

解得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ ，所以 $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\cdots,\boldsymbol{e_n}$ 线性无关.

容易证明，任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$ ，都可以用 $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\cdots,\boldsymbol{e_n}$ 线性表示为

$$\alpha=a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+\cdots+a_n\boldsymbol{e_n}.$$

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}, \tag{3.2}$$

写成向量方程的形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1,2,\cdots n)$，$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 都是 m 维列向量.

由向量线性相关的定义可知：齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 m 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

例 10 证明：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证 设有实数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

则

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1+\qquad k_3=0 \\ k_1+k_2\qquad=0 \\ \qquad k_2+k_3=0 \end{cases}.$$

由于齐次线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$, 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

下面给出一些有关向量组线性相关的定理及性质.

定理 1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

证 必要性 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ ，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

不妨设 $k_i\neq 0$ （$1\leqslant i\leqslant m$ ），则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即向量$\boldsymbol{\alpha}_i$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

充分性 设$\boldsymbol{\alpha}_j$可被其余向量线性表示

$$\boldsymbol{\alpha}_j=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}+l_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1}+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即有

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}-\boldsymbol{\alpha}_j+l_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1}+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

由于$l_j=-1\neq 0$，所以这组数$l_1,\cdots,l_{j-1},-1,l_{j+1},\cdots,l_m$不全为零，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

性质 1 如果一个向量组的一部分向量线性相关，则这个向量组线性相关.（部分相关则整体相关）

证 不妨设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中的部分向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\,(s<m)$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+0\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_s,0,\cdots,0$不全为零，所以整个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

由性质 1 可得下面性质 2.

性质 2 如果一个向量组线性无关，则它的任何一部分向量也线性无关.（整体无关则部分无关）

习题一

1．已知向量$\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,2,4)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,-1,0)$，求$2\boldsymbol{\alpha}$，$-\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$.

2．设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)$，求$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$及$3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

3．设$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(-3,1,5,7)$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$，使得$2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$.

4．设$3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$，求$\boldsymbol{\beta}$.

5．已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,0,-4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0,-1)$.

（1）求$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；

（2）若$2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta})=4(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$，求$\boldsymbol{\beta}$.

6．判断向量$\boldsymbol{\beta}$能否由其余向量线性表示，若能，写出线性表示式.

（1）$\boldsymbol{\beta}=(-1,7)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4)$；

（2）$\boldsymbol{\beta}=(2,3-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,\text{-}3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,6)$；

（3）$\boldsymbol{\beta}=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-11,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2)$；

（4）$\boldsymbol{\beta}=(3,-2,1,4)$，$e_1=(1,0,0,0)$，$e_2=(0,1,0,0)$，$e_3=(0,0,1,0)$，$e_4=(0,0,0,1)$.

7．判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-6,5,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,7,1)$．

8．当 t 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1=(t,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,t,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,t)$ 线性相关？

9．设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$，试证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关．

10．证明：一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充要条件是 $\alpha=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个零向量．

11．试证明向量组 $\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$（这些向量同维数）是线性相关的．

12．证明：若一组向量中有两个向量相同，则这组向量必线性相关．

第二节　向量组的秩

m 个 n 维向量形成的向量组的线性相关性是就全体 m 个向量而言的．但是，其中最多有多少个向量是线性无关的呢？如何抽出尽可能少的向量去代表全组呢？这就是本节要讨论的问题．

定义 1　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中的部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足:

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

（2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中的任意一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，

则称部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组．

例 1　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-2,0)$，可以验证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，但其中部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组．

同样可以验证部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组．

特别的，若向量组本身线性无关，则该向量组就是极大无关组，例如，n 维基本向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是极大无关组．

一般的，向量组的极大无关组可能不止一个，那么，这些极大无关组所含向量的个数是否相等呢?下面定理 1 回答了该问题．

定理 1　向量组中如果有多个极大无关组，则它们所含向量的个数一定相等．

定理 1 表述了向量组的一个重要的内在性质．因此，引入下述概念．

定义 2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩．记作 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

若一个向量组中只含零向量，则规定它的秩为零．

给出一个向量组，如果用定义来求它的极大无关组及秩，是比较繁琐的．为了找到更简单可行的方法，将向量组的秩与矩阵的秩联系起来，给出下面定义及定理．

设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

A 的每一行为一个 n 维行向量，故它有 m 个行向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{m}}&=(a_{\mathrm{m}1},a_{\mathrm{m}2},\cdots,a_{mn})\end{aligned}$$

称为 A 的行向量组.

同样，矩阵 A 的每一列是一个 m 维列向量，故它有 n 个列向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

称为 A 的列向量组.

定义 3 矩阵 A 的行向量组的秩称为 A 的行秩；A 的列向量组的秩称为 A 的列秩.

例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-3&2&0\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

的行向量组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,-1,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(-3,2,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(3,-2,0)\end{aligned}$$

即为上例 1，$\boldsymbol{\alpha}_3=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}_2$，故行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 但是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大无关组. 于是行向量组的秩为 2，所以 A 的行秩为 2.

又 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

也容易看出，列向量组的秩为 2，故 A 的列秩为 2.

可以证明：矩阵 A 的行秩、列秩和矩阵的秩是相等的. 我们将它表述成定理 2.

定理 2 矩阵 A 的秩和矩阵 A 的行秩、列秩均相等.

例 2 对于构成阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&4&1&0&2\\0&5&-1&2&0\\0&0&0&3&-2\end{pmatrix}$$

的五个列向量，由定理 2 可知，其秩为 3. 又因为 A 的首非零元所在的第一、二、四列的列向量是线性无关的，而若再加上一个列向量就线性相关，所以这五个列向量构成的向量组的极大无关组由首非零元所在列的列向量组成.

当矩阵不是阶梯形矩阵时，可以通过初等行变换将其化为阶梯形矩阵，由定理 2 和下面

定理 3 即可求出其列向量组的秩和极大无关组.

定理 3　列向量组通过初等行变换不改变线性相关性.

总之，求一向量组的秩和极大无关组，可以将这些向量作为矩阵的列构成一个矩阵，用初等行变换将其化为阶梯形矩阵，此阶梯形矩阵非零行的行数就是向量组的秩，首非零元所在列对应的原来向量组就是极大无关组.

例 3　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,4,2,-1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,2,-2),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(-1,6,4,-1),$$

求向量组的秩及其一个极大无关组.

解　作矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 用初等行变换将 A 化成阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\-2&4&2&6\\0&2&2&4\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&2&2&4\\0&2&2&4\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&-1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，向量组的秩 $r=3$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量组的一个极大无关组.

若要将其余向量用极大无关组线性表示出来，则继续对矩阵进行初等行变换，化为行简化阶梯形阵，线性表示式的系数就是该向量对应于行简化阶梯形阵中列向量的分量.

例 3 中，对已化成的阶梯形阵继续进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 4　求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-6,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,-3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,5),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,8)$ 的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解　作矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 用初等行变换将 A 化成行简化阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\-6&2&0&3\\4&-3&5&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&-1&3&6\\0&-1&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&-1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&1&-3&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&0&-2&-5\\0&1&-3&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-\frac{5}{2}\\0&1&-3&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，向量组的秩 $r=2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量组的一个极大无关组，并且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=-\frac{5}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2.$$

定理 4　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是它的秩 r 等于它所含向量的个数 m.

例如，n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的秩 $r=n$.

定理 4 还表明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩小于它所含向量个数 m，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

例 5　判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1,0,-2),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,1,8),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,2,1,4),\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,1,-1,2)$$

是否线性相关？

解　作矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，用初等行变换将 A 化成阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&0&0\\-1&4&2&1\\0&1&1&-1\\-2&8&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&3&3&0\\0&1&1&-1\\0&6&6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

向量组的秩 $r=3$，而 n=4，所以，此向量组线性相关.

推论 1　设 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则这个向量组一定线性相关.

例 6　讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,-1,-2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-3,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,4,0)$ 的线性相关性.

解　因为此向量组的向量个数多于向量的维数，由定理 4 的推论 1 可知，该向量组线性相关.

习题二

1．求下列向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,-3)$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-3)$

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-1,0)$

2．判断下列向量组的线性相关性.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2)$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,\text{-}1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,2,\text{-}4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,\text{-}5,10)$

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,2,6)$

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,4,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,2)$

3．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,6,0,0)$，试

（1）求线性组合 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；

（2）判断其线性相关性；

（3）求该向量组的秩；

（4）求其一个极大线性无关组.

4．求下列矩阵的列向量组的一个极大无关组.

（1）$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&1&3&1\\3&4&6&5\end{pmatrix}$

第三节　线性方程组解的判定

本节主要讨论含有 n 个未知量、m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.3}$$

解的判定．我们要解决的问题是如何判断方程组（3.1）何时有解？何时无解？有解时解有多少？

显然，线性方程组（3.3）有没有解，以及有怎样的解，完全决定于方程组的系数和常数项．因此，将线性方程组写成矩阵形式或向量形式，把矩阵或向量作为讨论线性方程组的工具，将带来极大的方便．

方程组（3.3）中各未知量的系数组成的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组（3.3）的系数矩阵．由各系数与常数项组成的矩阵，称为增广矩阵，记作 $\overline{\boldsymbol{A}}$ ，即

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

方程组（3.3）中的未知量组成一个 n 行、1 列的矩阵（或列向量），记作 $\boldsymbol{X}$ ；常数项组成一个 m 行、1 列的矩阵（或列向量），记作 $\boldsymbol{b}$ ，即

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

由矩阵运算，方程组（3.3）实际上是如下关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}.$$

如果令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

则方程组（3.3）的向量形式为

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{b}\,.$$

定理 1 （有解判定定理）方程组（3.3）有解的充分必要条件是秩(A) = 秩$(\overline{A})$.

证 必要性 因方程组（3.3）有解，设它的一组解为

$$x_1=l_1,x_2=l_2,\cdots,x_n=l_n\,,$$

满足方程组（3.3），即

$$\begin{cases}a_{11}l_1+a_{12}l_2+\cdots+a_{1n}l_n=b_1\\a_{21}l_1+a_{22}l_2+\cdots+a_{2n}l_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{m1}l_1+a_{m2}l_2+\cdots+a_{mn}l_n=b_m\end{cases}.$$

设秩$(\boldsymbol{A})=r$，由矩阵秩的定义可知，$\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 阶子式等于零．由方程组（3.3）的向量形式可以看出，$\boldsymbol{b}$ 是前 n 列的线性组合，由线性相关性可知，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 中任意 $r+1$ 阶子式等于零．所以秩$(\boldsymbol{A})$不会大于 r．但秩$(\boldsymbol{A})$也不会小于 r，故

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})=\text{秩}(\overline{\boldsymbol{A}}),$$

由 r 的任意性，必要性得证．

充分性 已知秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\overline{\boldsymbol{A}})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 r．不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 A 的列向量组的极大无关组．显然，这 r 个列向量也是 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的极大无关组，即 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的列向量 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{b}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r\,.$$

若不然，如果 $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的极大无关组将是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{b}$，即 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的列秩是 $r+1$，与假设矛盾．因而有

$$\boldsymbol{b}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n\,,$$

故

$$x_1=l_1,x_2=l_2,\cdots x_r=l_r,x_{r+1}=0,\cdots,x_n=0\,,$$

为方程组（3.3）的一组解，因而方程组（3.3）有解．证毕．

推论 1 线性方程组（3.3）有唯一的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

推论 2 线性方程组（3.3）有无穷多解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$.

由矩阵秩的求法可知，判断一个方程组解的情况，只需将其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换，化为阶梯形阵，其非零行行数即为 $r(\overline{\boldsymbol{A}})$，将阶梯形阵的最右一列去掉，非零行行数即为 $r(\boldsymbol{A})$，用定理 1 及推论，得出结论．

例 1 判断下列方程组是否有解？若有解，是有唯一解还是有无穷多解？

（1）$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ -x_1+7x_2-4x_3=3 \end{cases}$　　　（2）$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ -x_1+7x_2-4x_3=4 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ -x_1+7x_2-5x_3=3 \end{cases}$

解　（1）用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=3$，$r(\boldsymbol{A})=2$；$r(\boldsymbol{A})\neq r(\bar{\boldsymbol{A}})$，故方程组无解．

（2）用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2<n=3$，故方程组有无穷多解．

（3）用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3=n$，故方程组有唯一解．

例 2　问 a,b 取何值时，下列方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

$$\begin{cases} x_1+3x_3=-2 \\ -2x_1+x_2-4x_3=5 \\ x_1-x_2+ax_3=b \end{cases}$$

解　用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形阵，即

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & b+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b+3 \end{pmatrix}.$$

因此，当 $a=1$ 而 $b\neq-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\bar{\boldsymbol{A}})=3$，故方程组无解；

当 $a\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=3=n$，故方程组有唯一解；

当 $a=1$ 而 $b=-3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=2<n=3$，故方程组有无穷多解．

例 3　已知总成本 C 是产量 q 的二次函数

$$C(q)=a+bq+cq^2,$$

根据统计资料，产量与总成本之间有如表 3-2 所示的数据．试求总成本函数中的 a，b，c．

表 3-2

时期	第一期	第二期	第三期
产量 q（件）	5	10	30
总成本 C（百元）	100	160	650

解 将各期的产量及总成本的值代入已知二次函数模型中，得方程组

$$\begin{cases} a+5b+25c=100 \\ a+10b+100c=160 \\ a+30b+900c=650 \end{cases}.$$

利用初等行变换将其增广矩阵化为行简化阶梯形阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 1 & 10 & 100 & 160 \\ 1 & 30 & 900 & 650 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 0 & 5 & 75 & 60 \\ 0 & 25 & 875 & 550 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 0 & 1 & 15 & 12 \\ 0 & 1 & 35 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 & 100 \\ 0 & 1 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 87.5 \\ 0 & 1 & 0 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

由此得方程组的解为 a=65，b=4.5，c=0.5．因此总成本函数为

$$C(q)=65+4.5q+0.5q^2.$$

当方程组（3.3）中 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，称为齐次线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \tag{3.4}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}.$$

对齐次线性方程组（3.4）而言，由于常数列全为 0，其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等，即秩($\overline{\boldsymbol{A}}$)=秩($\boldsymbol{A}$)，由定理 1 可知它总是有解的．比如 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 就是方程组（3.4）的一个解，常称之为零解．我们所关心的是方程组（3.4）在什么条件下有非零解．

将推论 1 及推论 2 应用到齐次线性方程组（3.4）上，得到以下结论．

推论 3 齐次线性方程组（3.4）只有零解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$.

推论 4 齐次线性方程组（3.4）有非零解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$.

例 4 判断下列齐次方程组是否有非零解．

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4=0 \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+5x_3+8x_4=0 \end{cases}$$

解 用初等行变换将系数矩阵化为阶梯形阵，即

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&2&5&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&0&-4&-4\\0&-1&-4&-5\\0&1&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&-4&-5\\0&0&-4&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $r(A)=3<n=4$，所以齐次方程组有非零解.

例 5　设方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases},$$

试讨论 λ 取何值时，有非零解.

解　方程组为齐次线性方程组，对其系数矩阵进行初等行变换，化成阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\0&\lambda-1&1-\lambda\\0&0&2-\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}.$$

可以看出，当 $2-\lambda-\lambda^2=0$，$(1-\lambda)(\lambda+2)=0$，即 $\lambda=1$ 或 -2 时，$r(\boldsymbol{A})=2<n=3$，由推论 4，该方程组有非零解.

习题三

1．讨论下列方程组的解，若有解，是唯一解还是无穷多组解？

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=-11\\-x_1-x_2+x_3=7\\2x_1-3x_2+x_3=6\\-3x_1+x_2+2x_3=5\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3=-1\\2x_1+x_2-2x_3=1\\x_1+x_2+x_3=3\\x_1+2x_2-3x_3=1\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3=1\\x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$

2．判断下列齐次方程组是否有非零解.

（1）$\begin{cases}3x_1+2x_2-4x_3-5x_4=0\\3x_1-x_2+2x_4=0\\x_1+4x_2-5x_3=0\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3+2x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\-2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0\\3x_1+9x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+5x_2+3x_3=0\\x_1+8x_3=0\end{cases}$

3．问线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases},$$

当λ取何值时，有非零解？

4．设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases},$$

问当λ取何值时，（1）有唯一解；（2）有无穷多解；（3）无解．

5．$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$满足什么关系时，下列线性方程组有解？

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda_1 \\ x_1 \quad\quad + x_3 = \lambda_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = \lambda_3 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda_1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = \lambda_2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$

6．已知总成本C是产量q的二次函数

$$C(q) = a + bq + cq^2,$$

根据统计资料，产量与总成本之间有如表 3-3 所示的数据．试求总成本函数中的a，b，c．

表 3-3

时期	第一期	第二期	第三期
产量q（件）	6	10	20
总成本C（百元）	104	160	370

第四节　线性方程组解的结构

上一节讨论了线性方程组有解和无解的问题．在方程组有解的情况下，特别是有无穷多个解的情况下，如何通过适当的方式将解表示出来？这就是本节要讨论的线性方程组解的结构问题．

一、齐次线性方程组解的结构

前面已知，齐次线性方程组（3.4）的矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0},$$

其中，$\boldsymbol{A}$为方程组（3.4）的系数矩阵，$\boldsymbol{X}$称为未知向量．

方程组（3.4）的任一组解

$$x_1 = k_1, x_2 = k_2, \cdots, x_n = k_n,$$

可以看成一个n维向量

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

称这个向量为方程组（3.4）的一个解向量．

显然，n维零向量

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

是方程组（3.4）的一个解向量.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量具有如下两个性质.

性质 1 如果 ξ_1，ξ_2 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的两个解向量，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

证 因为 ξ_1，ξ_2 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的两个解，故有

$$\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0},\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}，$$

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}，$$

所以 $\xi_1+\xi_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

性质 2 如果 ξ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量，k 为任意实数，则 $k\xi$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

证 因为

$$\boldsymbol{A}(k\xi)=k(\boldsymbol{A}\xi)=k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}，$$

所以，$k\xi$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

由性质 1、性质 2 可知，如果 ξ_1，ξ_2，…，ξ_s 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的 s 个解向量，则它们的任意线性组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是任意常数.

定义 1 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一组解向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足：

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关；

（2）方程 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任意解向量都能由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示，

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

不难看出，如果方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解向量，则方程组就不存在基础解系. 如果方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解向量，则它就有无穷多个解向量，而它的基础解系就是其全部解向量构成的向量组的一个极大线性无关组，并且有下列定理.

定理 1 如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，那么方程组一定有基础解系，并且基础解系含有 $n-r$ 个解向量.

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\-2x_1-6x_2+7x_3+x_4=0\\-x_1-4x_2+6x_3-x_4=0\end{cases}$$

的基础解系和全部解.

解 对方程组的系数矩阵作如下初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\-2&-6&7&1\\-1&-4&6&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2\\0&-2&5&-3\\0&-2&5&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4&-5\\0&-2&5&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4&-5\\0&1&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

显然，$r(\boldsymbol{A})=2<4$（未知量个数），故方程组有非零解. 其一般解为

$\begin{cases} x_1 = -4x_3 + 5x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{2}x_3 - \dfrac{3}{2}x_4 \end{cases}$，其中 x_3， x_4 为自由未知量.

令自由未知量 x_3， x_4 分别取值(1,0)，(0,1)，得到方程组的两个解

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ \dfrac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -\dfrac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

可以证明：$\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关，而且方程组的每个解都能由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 线性表示．因此 $\boldsymbol{\xi}_1$， $\boldsymbol{\xi}_2$ 就是方程组的一个基础解系.

方程组的全部解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 k_1， k_2 为任意常数.

例 2　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

的全部解.

解　将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化阶梯形阵，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=2$．基础解系应含 $n-r(\boldsymbol{A})=5-2=3$ 个解向量．方程组的一般解为

$\begin{cases} x_1 = -x_3 + x_4 + x_5 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 - 2x_5 \end{cases}$，其中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

分别令 x_3, x_4, x_5 为(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)，得方程组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

方程组的全部解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3,$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

下面解本章开始给出的例 1.

解 设木工、电工、油漆工的日工资分别为 x_1,x_2,x_3，由题意，得方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+6x_3=10x_1\\4x_1+5x_2+x_3=10x_2\\4x_1+4x_2+3x_3=10x_3\end{cases},$$

整理成齐次线性方程组

$$\begin{cases}-8x_1+x_2+6x_3=0\\4x_1-5x_2+x_3=0\\4x_1+4x_2-7x_3=0\end{cases},$$

将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化阶梯形阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-8&1&6\\4&-5&1\\4&4&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&-5&1\\0&-9&8\\0&9&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{8}{9}\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{31}{36}\\0&1&-\frac{8}{9}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

方程组的一般解为

$\begin{cases}x_1=\frac{31}{36}x_3\\x_2=\frac{8}{9}x_3\end{cases}$，其中 x_3 为自由未知量，令 $x_3=1$，得方程组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{31}{36}\\\frac{8}{9}\\1\end{pmatrix},$$

方程组的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{pmatrix}\frac{31}{36}\\\frac{8}{9}\\1\end{pmatrix}.$$

因为要求每人的日工资在 60～80 元之间，由此有

$$\begin{cases}60 \leqslant \dfrac{31}{36}k_1 \leqslant 80 \\ 60 \leqslant \dfrac{8}{9}k_1 \leqslant 80 \\ 60 \leqslant k_1 \leqslant 80\end{cases},$$

整理，得

$$\begin{cases}69.6 \leqslant k_1 \leqslant 92.9 \\ 67.5 \leqslant k_1 \leqslant 90 \\ 60 \leqslant k_1 \leqslant 80\end{cases}, 解得 69.6 \leqslant k_1 \leqslant 80.$$

若进一步要求每人的日工资为整数，则 $k_1 = 72$, 得木工、电工、油漆工的日工资分别为 62 元、64 元和 72 元.

二、非齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组（3.3）

$$\begin{cases}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\end{cases},$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}.$$

令 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，得到的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$，称为非齐次线性方程组（3.3）的导出方程组，简称导出组.

方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解与其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解之间有着密切的联系，它们满足以下性质.

性质 3 若 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意两个解向量，则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个解向量.

证 因为 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个解向量，故

$$\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{AX}_1-\boldsymbol{AX}_2=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

性质 4 若 $\boldsymbol{X}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量，$\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个解向量，则 $\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量.

证 因为 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量，$\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量，故有

$$\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A\xi}=\mathbf{0},$$

于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{AX}_0+\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{b}+\mathbf{0}=\boldsymbol{b},$$

所以 $\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\xi}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量.

由该两条性质可得以下定理.

定理 2 如果 $\boldsymbol{X_0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量. 那么 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解向量都可以写成

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X_0}+\boldsymbol{\xi},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量.

证 因为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}_0$ 均是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量，由性质 3，$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量. 令

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0,$$

即得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\xi}.$$

由定理 2 可知，要求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的全部解向量，只要找出 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量（也叫特解）和其导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量即可. 而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量都能由它的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$（$s=n-r$）线性表示，因此将 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的全部解表示成

$$X=X_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s.$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

例 3 解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=5 \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4 \end{cases}.$$

解 将增广矩阵化为行简化阶梯形阵，即

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组的一般解为

$\begin{cases} x_1=2-2x_2-x_4 \\ x_3=1+x_4 \end{cases}$，其中 x_2,x_4 为自由未知量.

令 $x_2=x_4=0$，得方程组一特解

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

方程组导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases},$$

其中 x_2, x_4 为自由未知量.

分别令 x_2, x_4 为(1,0),(0,1)，得导出组的两个解向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 即导出组的一个基础解系. 所以方程组的全部解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

例 4　解下列非齐次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}.$$

解　将增广矩阵化为行简化阶梯形阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & -3 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & -3 & 13 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = 3 - 4x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

其中 x_4, x_5 为自由未知量.

令 $x_4 = x_5 = 0$，得方程组的一特解

$$X_0=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

方程组导出组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5\\x_2=-4x_5\\x_3=0\end{cases},$$

其中 x_4,x_5 为自由未知量.

分别令 x_4,x_5 为(1,0)，(0,1)，得导出组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

于是原方程组的全部解为

$$X=X_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

下面解本章开始给出的例 2.

解 由题意，已将列出的方程组整理得非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=700\\x_1-x_2+x_4=200\\x_2-x_5=200\\x_3+x_6=500\\x_4+x_6-x_7=0\\-x_5+x_7=200\end{cases}.$$

将增广矩阵化为阶梯形阵，即

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&0&700\\1&-1&0&1&0&0&0&200\\0&1&0&0&-1&0&0&200\\0&0&1&0&0&1&0&500\\0&0&0&1&0&1&-1&0\\0&0&0&0&-1&0&1&200\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&0&700\\0&1&1&-1&0&0&0&500\\0&0&1&-1&1&0&0&300\\0&0&0&1&-1&1&0&200\\0&0&0&0&1&0&-1&-200\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

继续对其进行初等行变换，化为行简化阶梯形阵，即

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 200 + x_6 \\ x_2 = \qquad\qquad x_7 \\ x_3 = 500 - x_6 \\ x_4 = \qquad -x_6 + x_7 \\ x_5 = -200 \qquad + x_7 \end{cases},$$

其中 x_6, x_7 为自由未知量.

令 $x_6 = x_7 = 0$，得方程组的一特解

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

方程组导出组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_6 \\ x_2 = x_7 \\ x_3 = -x_6 \\ x_4 = -x_6 + x_7 \\ x_5 = x_7 \end{cases},$$

其中 x_6, x_7 为自由未知量.

分别令 x_6, x_7 为（1，0），（0，1），得导出组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，\ \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是原方程组的全部解为

$$
\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}200\\0\\500\\0\\-200\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

请读者考虑：欲使 $X\geqslant 0$，k_1,k_2 的取值范围应如何确定？

习题四

1．求下列齐次线性方程组的基础解系和全部解.

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=0\\x_1+2x_2+x_4=0\\-x_1-2x_2+2x_3+4x_4=0\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$

2．λ 为何值时，下列齐次线性方程组

$$
\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}
$$

只有零解？有非零解？并求非零解.

3．求下列非齐次线性方程组的全部解.

（1）$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4=1\\-2x_1-4x_2+x_3-3x_4=4\\4x_1+8x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=0\\x_1+2x_2+x_4=4\\-x_1-2x_2+2x_3+4x_4=5\end{cases}$　（4）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$

（5）$\begin{cases}x_1+6x_2+2x_3+2x_4=6\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\\4x_1-x_2+3x_3+3x_4+5x_5=4\\2x_1-3x_2+x_3+x_4+3x_5=0\end{cases}$　（6）$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=7\\2x_1-2x_2+2x_3-4x_4=12\\-x_1+x_2-x_3+2x_4=-4\\-3x_1+x_2-8x_3-10x_4=-29\end{cases}$

4．λ 为何值时，非齐次线性方程组

$$
\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}
$$

有解？并求出它的全部解.

5．设线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases},$$

讨论 a、b 为何值时，方程组有解，并求解.

复习题三

一、填空题

1．若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 是线性____________.

2．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ _______ $\mathbf{0}$.

3．n+1 个 n 维向量构成的向量组一定线性__________.

4．向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩就是指该向量组的__________所含向量的个数.

5．齐次线性方程组中方程的个数少于未知量的个数时，它的解__________.

6．任一矩阵都可通过_____________变换，化成行简化阶梯型矩阵.

7．线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的必要充分条件是_______________.

8．m 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$，当系数矩阵的秩为 r 时，其基础解系包含_________个解向量.

9．非线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$____________.

二、单项选择题

1．向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则（　　）命题成立.

A．对任一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

B．必有无穷多组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

C．必有某指定的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

D．就是有 $k_1=k_2=\cdots=k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

2．若（　　）成立，则向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

A．$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$

B．有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$

C．对任一组不全为零的数 $k_1=k_2=\cdots=k_m$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$

D．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有向量不能被其余向量线性表出

3．若向量组线性相关，则（　　）.

A．组中任一向量都可由其余向量线性表出

B．组中至少有某一向量可由其余向量线性表出

C．组中各向量都可以相互线性表出

D．向量组的部分组都线性相关

4．非齐次线性方程组的任一解为 X_1，与其导出组的基础解系组成的向量组（　　）.

A．线性无关的

B．线性相关的

C．可能线性无关，也可能线性相关

D．以上都不对

5．向量组的 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}$ 秩为（　　）.

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．5

6．若 $AX=b$ 的一般解为 $\begin{cases}x_1=2x_3+1\\x_2=3x_3-2\end{cases}$（$x_3$ 为自由未知量），则（　　）.

A．令 $x_3=3$，得特解 $X_0=\begin{pmatrix}7\\7\\3\end{pmatrix}$　　　　B．只有令 $x_3=0$，才能求得 $AX=b$ 的特解

C．令 $x_3=0$，得特解 $X_0=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$　　　　D．令 $x_3=1$，得特解 $X_0=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

7．$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4\\x_2-x_3=2\\-2x_2+2x_3=6\end{cases}$ 一定（　　）.

A．有无穷多解　　　　B．有唯一解

C．只有零解　　　　D．无解

8．以下结论正确的是（　　）.

A．方程个数小于未知量个数的线性方程组一定有解.

B．方程个数等于未知量个数的线性方程组一定有唯一解.

C．方程个数大于未知量个数的线性方程组一定无解.

D．以上结论都不对.

9．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若（　　），则 $AX=0$ 有非零解.

A．$m<n$　　　　B．秩$(\boldsymbol{A})=n$

C．$m>n$　　　　D．秩$(\boldsymbol{A})=m$

10．某个线性方程组相应的齐次线性方程组只有零解，则该线性方程组（　　）.

A．可能无解　　　　B．有唯一解

C．有无穷多解　　　　D．可能有解

三、若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 组线性无关，试证明 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

四、若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，问 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$ 是否一定线性相关？

五、若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\beta}$是另外一个向量，问$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}$是否线性无关？

六、求下列向量组的秩.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1)$

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,-4,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,11,8)$

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_5=(3,1,4)$

七、求下列齐次线性方程组的基础解系和全部解.

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3-3x_4=0 \\ -3x_1+4x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ -2x_1+15x_2-6x_3+13x_4=0 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=0 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

八、求下列非齐次线性方程组的全部解.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-9 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=-13 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1-2x_2-6x_3=-18 \\ x_2+2x_3=7 \\ x_1-x_2-2x_3=-5 \\ 2x_1-5x_2-15x_3=-46 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=4 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=8 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=16 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=2 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+6x_4+3x_5=6 \\ -x_1-2x_2+x_3-x_4+3x_5=4 \end{cases}$

九、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足什么关系时，下列线性方程组有解？

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=\lambda_1 \\ 3x_1-3x_2+9x_3=\lambda_2 \\ -2x_1+2x_2-6x_3=\lambda_3 \end{cases}$$

十、λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda \end{cases}$$

无解？有无穷多解？并在有解时求出其解.

十一、λ 为何值时，下列齐次线性方程组只有零解？有非零解？并求非零解.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1+7x_2-5x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3-\lambda x_4=0 \end{cases}$$

十二、试求下列线性方程组有解的充要条件.

$$\begin{cases} x_1-x_2 = a_1 \\ x_2-x_3 = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}-x_n = a_{n-1} \\ -x_1+x_n = a_n \end{cases}.$$

十三、b_1,b_2,b_3 满足什么关系时，下列线性方程组有解？

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=b_1 \\ x_1+x_3=b_2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=b_3 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=b_1 \\ 3x_1-3x_2+9x_3=b_2 \\ -2x_1+2x_2-6x_3=b_3 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=b_1 \\ 4x_1-2x_2+x_3=b_2 \\ x_1-x_2+5x_3=b_3 \end{cases}$