# 第 4 章　不定积分

正如加法有其逆运算减法，乘法有其逆运算除法一样，微分法也有它的逆运算——积分法．我们已经知道，微分法的基本问题是研究如何从已知函数求出它的导函数，与之相反的问题是：求一个未知函数，使其导函数恰好是某一已知的函数．这种逆问题不仅是数学理论本身的需要，而且还因为它出现在许多实际问题之中．例如：已知速度 $v(t)$，求路程 $s(t)$；已知加速度 $a(t)$，求速度 $v(t)$；已知曲线上每一点处的切线斜率（或它所满足的某规律），求曲线方程等．这些内容与后续章节（定积分及其应用）构成一元函数微积分学的另一重要部分——积分法．

前面已经介绍已知函数求导数的问题，现在我们要考虑其反问题：已知导数求其函数，即求一个未知函数，使其导数恰好是某一已知函数．这种由导数或微分求原函数的逆运算称为不定积分．本章将介绍不定积分的概念及其计算方法．

## 4.1　原函数与不定积分概念

### 一、原函数与不定积分

**定义 1**　已知函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得在该区间的任一点处，都有关系式

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

成立，则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在该区间上的一个原函数．

例如：$\frac{1}{3}x^3$ 是 $x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$ 或 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3\right)=x^2\mathrm{d}x$．又如，$F(x)=x^4$ 是 $f(x)=4x^3$ 的一个原函数，因为 $(x^4)'=4x^3$ 或 $\mathrm{d}(x^4)=4x^3\mathrm{d}x$．

再考虑一个问题：函数 $u(x)=x^4+1$，$v(x)=x^4+2$，$w(x)=x^4-3$ 是不是 $f(x)=4x^3$ 的原函数？

回答是肯定的，这是因为常数的导数恒为零．由此可推知 $F(x)=x^4+C$（$C$ 为任意常数）都是 $f(x)=4x^3$ 的原函数．

由上面的例子，使我们猜想到：如果一个函数 $f(x)$ 的原函数存在，则它的原函数必有无穷多个．下面的定理就说明了这个问题．

**定理 1**　如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ （ $C$ 是任意常数）都是 $f(x)$ 的原函数，并且 $f(x)$ 的任何一个原函数都可表示为 $F(x)+C$ .

事实上，研究原函数必须解决以下两个重要问题：

（1）在什么条件下，一个函数的原函数存在？如果存在，是否只有一个？

（2）若已知某函数的原函数存在，又怎样把它求出来？

关于第一个问题，有下面两个定理；至于第二个问题，则是本章以后要着重介绍的各种积分方法.

**定理 2**　如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $I$ 上存在原函数 $F(x)$ .

本定理将在下一章中加以证明.

由于初等函数在其有定义的区间 $I$ 上是处处连续的，因此由定理 1 可知，每个初等函数在其有定义的区间上都有原函数．除此之外，并不能保证每一个定义在区间上的函数都有原函数（参见本节习题 5）.

**定理 3**　如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ （ $C$ 是任意常数）都是 $f(x)$ 的原函数，并且 $f(x)$ 的任何一个原函数都可表示为 $F(x)+C$ .

**证明**：先证 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数．这是显然的，因为已知 $F'(x)=f(x)$ ，所以 $[F(x)+C]'=F'(x)+0=f(x)$ ，这表明 $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

其次，设 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的任一原函数，即 $G'(x)=f(x)$ ，则 $[G(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0$ .

由拉格朗日中值定理推论 1 知 $G(x)-F(x)\equiv C$ （ $C$ 是任意常数），所以 $G(x)=F(x)+C$ .

这就表明了 $f(x)$ 的任何一个原函数都可以表示成 $F(x)+C$ 的形式，即只需求出任意一个原函数，由它分别加上各个不同的常数，便可得到全部的原函数，即一个函数的原函数是不唯一的．根据这种性质，进一步引入下面的定义：

**定义 2**　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则当 $C$ 为任意常数时的表达式 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$ ．其中 $x$ 称为积分变量， $f(x)$ 称为被积函数， $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，“ $\int$ ” 为积分号.

根据定理 1，如果知道 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ ，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \text{（}C\text{ 是任意常数），} \tag{2}$$

其中 $C$ 称为积分常数.

由定义知，求函数 $f(x)$ 的不定积分，就是求 $f(x)$ 的全体原函数，在 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中，积分号“ $\int$ ”表示对函数 $f(x)$ 进行求原函数的运算．故求不定积分的运算实质上就是求导（或求微分）运算的逆运算.

**例 1**　求 $\int x^4\mathrm{d}x$ .

**解** 因为$\left(\dfrac{x^5}{5}\right)'=x^4$，所以$\dfrac{x^5}{5}$是$x^4$的一个原函数，从而有

$$\int x^4\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}+C \quad（C\text{ 是任意常数}）.$$

**例 2** 求$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

**解** 因为$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，所以$\arctan x$是$\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数，从而有

$$\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C \quad（C\text{ 是任意常数}）.$$

**例 3** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$（$x\neq 0$）.

**解** 当$x>0$时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

当$x<0$时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}(-x)'=\dfrac{1}{x}$，得

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},$$

因此有 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

根据不定积分的定义可得到下面两个性质：

**性质 1** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$. （3）

**性质 2** $\displaystyle\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\displaystyle\int\mathrm{d}F(x)=F(x)+C$. （4）

## 二、不定积分的几何意义

设$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，则曲线$y=F(x)$称为函数$f(x)$的一条积分曲线. 如果把曲线$y=F(x)$沿$y$轴向上或向下平行移动，就得到一族曲线，因此，不定积分的几何意义是$f(x)$的全部积分曲线所组成的积分曲线族，其方程是$y=F(x)+C$.

又因为无论$C$取什么值都有$[F(x)+C]'=f(x)$. 因此，这个曲线族里的所有积分曲线在横坐标$x$相同的点处的切线彼此平行，即这些切线有相同的斜率$f(x)$，如图 4-1 所示.

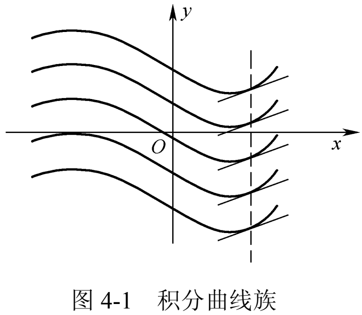

图 4-1 积分曲线族

**例 4** 求通过点$(1,0)$，斜率为$2x$的曲线.

**解**　设所求曲线方程为 $y=f(x)$，由题设条件知 $f'(x)=2x$，而 $x^2$ 是 $2x$ 的一个原函数，于是得到斜率为 $2x$ 的积分曲线族为 $y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

又因为所求曲线要通过点 $(1,0)$，所以得 $C=-1$，因此所求曲线方程为 $y=x^2-1$.

### 三、基本积分公式表

根据不定积分的定义，由基本导数公式或微分公式，就可得到基本积分公式．例如，由 $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$（$\alpha\neq-1$），得积分公式 $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$（$\alpha\neq-1$）.

又如，由 $(a^x)'=a^x\ln a$，得积分公式 $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.

类似地可以得到其他积分公式．下面把一些基本的积分公式罗列如下：

（1）$\int 0\mathrm{d}x=C$；

（2）$\int \mathrm{d}x=x+C$；

（3）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$（$\alpha\neq-1$）；

（4）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$；

（5）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$（$a>0$，$a\neq1$）；

（6）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

（7）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

（8）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

（9）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$；

（10）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

（11）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$；

（12）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

（13）$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$；

（14）$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$；

（15）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$；

（16）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$（$a>0$）.

以上基本积分公式是求不定积分的基础，必须熟记.

**例 5** 求 $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

**解** 由基本积分公式（3）得

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C .$$

**例 6** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 由基本积分公式（15）有 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$，又因为 $(-\arccos x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，所以又有 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$.

事实上，由于 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 有如下关系：

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

可见它们之间只差一个常数，因此，$\arcsin x + C$ 与 $\arccos x + C$ 都是函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的不定积分.

## 四、不定积分的两个基本运算法则

由微分法则容易证得不定积分的两个基本运算法则：

（1） $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数，$k \neq 0$）； （5）

（2） $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$ . （6）

**证明**：只需证明两边的导数相等就行.

（1）$\left[\int kf(x)\mathrm{d}x\right]' = kf(x)$，

$$\left[k\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = k\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' = kf(x) .$$

（2）$\left\{\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x\right\}' = f(x) \pm g(x)$ .

$$\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)\mathrm{d}x\right]' = \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x) \pm g(x) .$$

## 五、积分基本公式的应用

利用不定积分的两个基本运算法则和基本积分公式可以求一些较简单函数的不定积分．对一些复杂的被积函数，需要进行代数或三角恒等变形后才能利用积分基本公式求出结果．下面举例说明．

**例 7** 求$\int\sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x$．

**解**
$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x&=\int(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

**注意**：检验积分结果是否正确，只需对结果求导，看它的导数是否等于被积函数，相等时结果是正确的，否则结果是错误的．

**例 8** 求 $\int\frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$．

**解**
$$\begin{aligned}\int\frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\int\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

**例 9** 求$\int(1-\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\right)\mathrm{d}x$．

**解**
$$\begin{aligned}\int(1-\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\right)\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1+x-x\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x-\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\\&=2x^{\frac{1}{2}}-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.\end{aligned}$$

**例 10** 求$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$．

**解**
$$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int (x^2-1)\mathrm{d}x+\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.$$

**例 11**　求 $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ .

**解**　$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int (3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln(3\mathrm{e})}(3\mathrm{e})^x+C$ .

**例 12**　求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x=\int (\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$
$$=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x$$
$$=\tan x-x+C.$$

**例 13**　求 $\int \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$ .

**解**　利用三角公式 $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$ ，得
$$\int \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}\mathrm{d}x$$
$$=2\int (1+\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=2(x+\sin x)+C .$$

## 习题 4-1

1．求不定积分.

（1）$\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（3）$\int (x^2+1)^2\mathrm{d}x$　　（4）$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（5）$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　（6）$\int \frac{2x^4+x^2+3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

（7）$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}$　　（8）$\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

（9）$\int \sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$　　（10）$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$

（11）$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$　　（12）$\int \cot^2 x\mathrm{d}x$

（13）$\int \cos x(\tan x + \sec x)\mathrm{d}x$　　（14）$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x$

（15）$\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$　　（16）$\int \frac{\mathrm{e}^{2t}-1}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t \ \ f(x)$

（17）$\int \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\mathrm{d}x$　　（18）$\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

2．设 $\int xf(x)\mathrm{d}x = \arccos x + C$，求 $f(x)$.

3．一曲线通过点 $(\mathrm{e}^2, 3)$，且在任意点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

4．一物体由静止开始运动，经 $t$ 秒后的速度是 $3t^2$（m/s），问

（1）在 3 秒后物体离出发点的距离是多少？

（2）物体走完 360 米需要多长时间？

5．证明：函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ 在任何含有原点为内点的区间上没有原函数．每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

## 4.2　换元积分法

直接利用基本积分公式和不定积分的性质所能计算的积分是十分有限的．因此，有必要进一步来研究不定积分的求法．本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量的代换，得到复合函数的积分法，称为换元积分法，简称换元法．换元法通常分成两类，下面先讲第一类换元法.

### 一、第一类换元法

如果不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 用直接积分法

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

做变量代换 $u = \varphi(x)$，并注意到 $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x)$，则可将关于变量 $x$ 的积分转化为关于变量 $u$ 的积分，于是有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int g(u)\mathrm{d}u\,.$$

如果 $\int g(u)\mathrm{d}u$ 可以求出，不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的计算问题就解决了，这就是第一类换元法.

**定理 1**　设 $g(u)$ 的原函数为 $F(u)$，$u = \varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g(u)\mathrm{d}u = F(u)+C = F[\varphi(x)]+C\,. \qquad (1)$$

**注**：上述公式中，第一个符号表示换元 $\varphi(x)=u$ ，最后一个符号表示回代 $u=\varphi(x)$ .

此定理还可以写成下面便于应用的形式：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)]+C\,. \qquad (2)$$

运用定理 1 求不定积分时，关键的一步是凑微分，即设法凑成 $\int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$ 表达式的形式.

**例 1** 求 $\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ .

**解** $\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2 = \int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C = \mathrm{e}^{x^2} + C$ .

**例 2** 求 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ .

**解** $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x) = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln(1+\mathrm{e}^x)+C$ .

利用凑微分法求不定积分是需要一定技巧的，而且往往要做多次试探，初学者不要怕失败．如果题目不复杂，可以省写中间变量，而直接写出积分结果.

**例 3** 求 $\int \cot x\mathrm{d}x$ .

**解** $$\int \cot x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}(\sin x) = \ln|\sin x| + C\,. \qquad (3)$$

**例 4** 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$ .

**解** 先将被积函数分成 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) - \int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right] \\ &= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|]+C \qquad (4) \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\end{aligned}$$

**例 5** 求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x$ .

**解** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}\int(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^3-1) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}+C$ .

**例 6** 求 $\int \frac{1}{x^2+2x+4}dx$ .

**解** 将被积函数改写成 $\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}$ .

利用上一节公式（14），于是

$$\int \frac{1}{x^2+2x+4}dx=\int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}d(x+1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C .$$

**例 7** 求 $\int \sec x dx$ .

**解**

$$\begin{aligned}\int \sec x dx&=\int \frac{1}{\cos x}dx\\&=\int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C.\end{aligned} \tag{5}$$

类似可得

$$\int \csc x dx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C . \tag{6}$$

**例 8** 求 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$ .

**解一**

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C .$$

**解二**

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C .$$

**例 9** 求 $\int \cos 2x\cos 3x dx$ .

**解** 利用三角学中的积化和差公式，有

$$\int \cos 2x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C .$$

**例 10** 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$（$a>0$）.

**解** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C .$

**例 11** 求 $\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$ .

**解** 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$， $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x &= \int \frac{(u-1)^2}{u^3}\mathrm{d}u = \int (u^2-2u+1)u^{-3}\mathrm{d}u \\ &= \int (u^{-1}-2u^{-2}+u^{-3})\mathrm{d}u \\ &= \ln|u|+2u^{-1}-\frac{1}{2}u^{-2}+C \\ &= \ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.\end{aligned}$$

**例 12** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+3\ln x)}$ .

**解** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+3\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+3\ln x} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(1+3\ln x)}{1+3\ln x} = \frac{1}{3}\ln|1+3\ln x|+C$ .

**例 13** 求 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ .

**解** 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$ ，因此 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$ .

**例 14** 求 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$ .

**解** $\int \sin^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\sin x\mathrm{d}x = -\int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x) = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ .

**例 15** 求 $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x \\ &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x(-1)\mathrm{d}\cos x \\ &= \int (\cos^4 x-\cos^2 x)\mathrm{d}\cos x \\ &= \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.\end{aligned}$$

**例 16** 求 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$ .

**解**
$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2x+\cos 4x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C .\end{aligned}$$

对于 $\int \sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$（$m$，$n$ 为非负整数）类型的积分，总可用例 15 或例 16 的方法去解.

当 $m$ 及 $n$ 中有一个为奇数时，譬如 $n=2k+1$，有

$$\int \sin^m x\cos^{2k+1} x\mathrm{d}x=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \mathrm{d}\sin x=\int u^m (1-u^2)^k \mathrm{d}u .$$

化成 $u$ 的多项式的积分，求出以后以 $u=\sin x$ 代回即得所求.

当 $m$ 及 $n$ 都是偶数时，用倍角公式 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$，$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ 化成 $\cos 2x$ 的多项式，其中各项 $a_k\cos^k 2x$ 仍按 $k$ 为奇偶类似处理之.

**例 17** 求 $\int \tan^m x\sec^{2k} x\mathrm{d}x$（$m$，$k$ 为正整数）.

**解** $\int \tan^m x\sec^{2k} x\mathrm{d}x=\int \tan^m x(\tan^2 x+1)^{k-1}\mathrm{d}\tan x=\int u^m (u^2+1)^{k-1}\mathrm{d}u$ .

最后一个积分为多项式的积分，求出以后以 $u=\tan x$ 代回，即得所求.

**例 18** 求 $\int \tan^{2k+1} x\sec^n x\mathrm{d}x$（$k$，$n$ 为正整数）.

**解** $\int \tan^{2k+1} x\sec^n x\mathrm{d}x=\int (\sec^2 x-1)^k x\sec^{n-1} x\mathrm{d}\sec x=\int (u^2-1)^k u^{n-1}\mathrm{d}u$ .

最后一个积分为多项式的积分，求出以后以 $u=\sec x$ 代回，即得所求.

类似地，可求 $\int \cot^m x\csc^{2k} x\mathrm{d}x$ 及 $\int \cot^{2k+1} x\csc^n x\mathrm{d}x$ .

## 二、第二类换元法

第一类换元法是通过变量代换 $u=\varphi(x)$，将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f(u)\mathrm{d}u$ .

第二类换元法则相反，是通过变量代换 $x=\psi(t)$ 将积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$ . 在求出后一个积分后，再以 $x=\psi(t)$ 的反函数 $t=\psi^{-1}(x)$ 代回去，这样，换元公式可表示为 $\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$，其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 为 $x=\psi(t)$ 的反函数.

**定理 2** 设 $f(x)$ 连续，又 $x=\psi(t)$ 的导数 $\psi'(t)$ 也连续，且 $\psi'(t)\neq 0$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)} . \tag{7}$$

上式称为第二类换元积分公式.

**例 19** 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

**解** 利用三角公式 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ 来化去根式.

设 $x=a\sin t$，$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，因此有

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x&=\int a\cos t\,a\cos t\mathrm{d}t\\&=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.\end{aligned}$$

为了还回原来的变量，由 $x=a\sin t$ 做直角三角形（如图 4-2 所示），可知 $\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

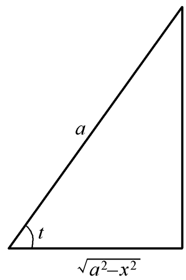

图 4-2

代入上式中，得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C. \tag{8}$$

对于此题，也可设 $x=a\cos t$，请读者自己练习.

**例 20** 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$.

**解** 为了去掉根式 $\sqrt{a^2+x^2}$，考虑到三角函数公式 $\tan^2 t+1=\sec^2 t$，故设 $x=a\tan t$，$-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，因此有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}&=\int\frac{1}{a\sec t}a\sec^2 t\mathrm{d}t\\&=\int\sec t\mathrm{d}t\\&=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.\end{aligned}$$

由 $x=a\tan t$ 作直角三角形（如图 4-3 所示），可知 $\sec t=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，这样就得到

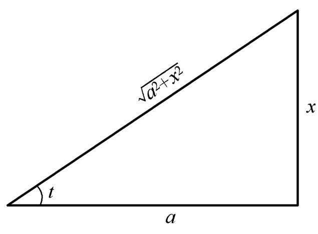

图 4-3

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}&=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1\\&=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\end{aligned}$$

其中 $C=C_1-\ln a$. 用类似方法可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C .$$

以上介绍的第二类换元积分法适用于下列三种情况：

（1）被积函数含 $\sqrt{a^2-x^2}$ ，这时可设 $x=a\sin t$；

（2）被积函数含 $\sqrt{x^2+a^2}$ ，这时可设 $x=a\tan t$；

（3）被积函数含 $\sqrt{x^2-a^2}$ ，这时可设 $x=a\sec t$ .

第二类换元积分法还适用于被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的一些积分．这时，需先将 $ax^2+bx+c$ 配方，然后作变量代换，便可将积分转化成上面所讲的三种类型的积分之一.

**例 21** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16x^2+8x+5}}$ .

**解** 
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16x^2+8x+5}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(4x+1)}{\sqrt{(4x+1)^2+4}}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+2^2}}\\ &= \frac{1}{4}\ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|4x+1+\sqrt{16x^2+8x+5}\right|+C .\end{aligned}$$

**例 22** 求 $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$ .

**解** 注意到分子是 $x$ 的一次式，可以凑出分母中所含二次式的导函数 $2-2x$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{(2-2x)-12}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{(2-2x)-12}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x + 6\int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\\ &= -\sqrt{3+2x-x^2}+6\arcsin\frac{x-1}{2}+C .\end{aligned}$$

当有理分式函数中分母的阶较高时，常采用倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$ .

**例 23** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x$ .

**解** 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{x(x^7+2)}\mathrm{d}x = \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6}{1+2t^7}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{14}\ln\left|1+2t^7\right| + C = -\frac{1}{14}\ln\left|2+x^7\right| + \frac{1}{2}\ln|x| + C .$$

**例 24** 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ .

**解** 令 $t=\sqrt{1+x^2}$ ，则 $x^2=t^2-1$ ， $x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$ ，

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2-1)^2}{t}t\mathrm{d}t = \int (t^4-2t^2+1)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C = \frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2} + C .$$

有些不定积分还可以通过不同的换元法，求得它的结果.

**例 25** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ .

**解法一** 使用第一类换元法，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$= \sqrt{1-u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C .$$

**解法二** 使用第二类换元法，令 $x = a\sec t$ .

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t\tan t}\mathrm{d}t = \int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C .$$

本题除以上两种解法外，还能把它转化为有理分式的不定积分来解.

## 习题 4-2

1．填空使下列等式成立.

（1） $\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(5x-2)$　　　（2） $x\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(1-x^2)$

（3） $x^3\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(3x^4-2)$　　　（4） $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$

（5） $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\sqrt{x})$　　　（6） $\frac{\mathrm{d}x}{x} =$ ________ $\mathrm{d}(5\ln|x|)$

（7） $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x} =$ ________ $\mathrm{d}(\tan 2x)$　　　（8） $\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} =$ ________ $\mathrm{d}(\arctan 2x)$

（9）$\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$ ________ $d(1-\arcsin x)$　　（10）$\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} =$ ________ $d(\sqrt{x^2-1})$

2．求下列不定积分．

（1）$\int 2\cos 2x dx$　　（2）$\int \dfrac{1}{3+2x} dx$

（3）$\int (2xe^{x^2} + x\sqrt{1-x^2} + \tan x) dx$　　（4）$\int \cos^2 x dx$

（5）$\int \dfrac{dx}{x^2+2x+3}$　　（6）$\int \left[\dfrac{1}{x(1+2\ln x)} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}}\right] dx$

（7）$\int e^{3x} dx$　　（8）$\int (2-3x)^2 dx$

（9）$\int xe^{-x^2} dx$　　（10）$\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

（11）$\int \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$　　（12）$\int \dfrac{3x^3}{1-x^4} dx$

（13）$\int \dfrac{x+1}{x^2+2x+5} dx$　　（14）$\int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

（15）$\int \dfrac{1}{x\ln x \ln\ln x} dx$　　（16）$\int \tan^{10} x \sec^2 x dx$

（17）$\int \dfrac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$　　（18）$\int \dfrac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$

（19）$\int \dfrac{1}{\sin x \cos x} dx$　　（20）$\int \sin 5x \sin 7x dx$

（21）$\int \tan^3 x \sec x dx$　　（22）$\int \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

（23）$\int \dfrac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$　　（24）$\int \dfrac{x^3}{9+x^2} dx$

（25）$\int \dfrac{1}{2x^2-1} dx$　　（26）$\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

## 4.3　分部积分法

乘积求导公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

在求导运算中起着重要的作用．现在考虑这一公式对应的不定积分形式．

将上式写成 $uv' = (uv)' - u'v$，两端积分：

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \tag{1}$$

或
$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x)=u(x)\,v(x)-\int v(x)\,\mathrm{d}u(x)\,. \tag{2}$$

公式表明，不定积分$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$（或$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$）的计算可转化成$\int v(x)\mathrm{d}u(x)$（或$\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$）的计算，如果后者较容易计算，则这种转化作用是有利的．公式（1）或（2）称为不定积分的**分部积分公式**．

为简便起见，也可把公式（1）写成下面的形式：
$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u\,. \tag{3}$$

现在通过例子说明如何运用这个重要的公式．

**例 1**　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ .

**解**　设$u=x$，$v=\mathrm{e}^x$，则由公式（2）有
$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C\,.$$

**例 2**　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$ .

**解**　设$u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$，则
$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x&=\int x\mathrm{d}\sin x\\&=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x\\&=x\sin x+\cos x+C.\end{aligned}$$

**注**：如果设 $u=\cos x$，$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，结果是
$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\cos 2x+\int x^2\sin x\mathrm{d}x\,,$$

最后这个积分更为复杂．这说明分部积分公式的转化作用也可能是由简转繁的．如何有效地使用分部积分公式，使之实现化繁为简，需要通过做题积累经验．

**例 3**　求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$ .

**解**　设$u=\ln x$，$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$，于是
$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\int x^2\mathrm{d}\ln x\right]=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\int x\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right]+C=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\,.\end{aligned}$$

从这些例子可以看到，应用分部积分法求不定积分时，关键步骤仍然是凑微分，但这是部分的凑微分，即把被积函数中的一部分与$\mathrm{d}x$凑成微分$\mathrm{d}v$．一般的，当被积函数含$\mathrm{e}^x$，$\sin x$，$\cos x$等时，把$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$\sin x\mathrm{d}x$，$\cos x\mathrm{d}x$凑成微分形式$\mathrm{d}v$，使积分变成$\int u(x)\mathrm{d}v(x)$的形式．

有些积分需要连续使用几次分部积分公式才能求出．

**例 4** 求 $\int x^2 e^x dx$.

**解** $$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$$
$$= x^2 e^x - \int e^x dx^2$$
$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx)$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

**例 5** 求 $\int \arcsin x dx$.

**解** 设 $u = \arcsin x$， $dv = dx$， 于是
$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int x d(\arcsin x)$$
$$= x \cdot \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

使用分部积分公式还有一些技巧，请看下面的例子.

**例 6** 求 $\int \sqrt{x^2+a^2} dx$.

**解** $$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = x \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \int x d(\sqrt{x^2+a^2})$$
$$= x \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} dx$$
$$= x \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$
$$= x \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$
$$= x \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2} dx + a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

右端又出现所求的积分，这时，只需将积分从右端移到左端，除以 2，就得到
$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

用同样的方法可推出
$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

这两个积分的结果以后可作为公式应用.

**例 7** 求 $\int e^x \sin 3x dx$.

**解** 设 $u=\sin 3x$， $dv=e^x dx=d(e^x)$，则

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3\int e^x \cos 3x dx.$$

再用一次分部积分公式，仍设 $dv=e^x dx=d(e^x)$，于是

$$\int e^x \sin 3x dx = e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x - 9\int e^x \sin 3x dx,$$

移项得
$$\int e^x \sin 3x dx = \frac{e^x}{10}(\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$$

读者也可设 $u=e^x$， $dv=\sin 3x dx$.

在积分过程中，往往要兼用换元法与分部积分法.

**例 8** 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

**解** 令 $t=\sqrt{x}$，则 $dx=2tdt$，

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t 2tdt = 2\int te^t dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

**例 9** 求 $\int \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.

**解** 令 $t=1-x$，则 $dx=-dt$，

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} dx &= -\int \frac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \arcsin t d(\sqrt{1-t^2}) \\ &= \sqrt{1-t^2}\arcsin t - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{1-t^2} dt \\ &= \sqrt{1-t^2}\arcsin t - t + C_1 \\ &= \sqrt{2x-x^2}\arcsin(1-x) + x + C.\end{aligned}$$

其中 $C=C_1-1$.

# 习题 4-3

1．求下列不定积分.

（1） $\int x\sin x dx$　　（2） $\int xe^{-x} dx$

（3） $\int x^2 \ln x dx$　　（4） $\int x^2 \cos x dx$

（5） $\int \ln x dx$　　（6） $\int x\tan^2 x dx$

（7） $\int x\arctan x dx$　　（8） $\int e^{2x}\sin x dx$

（9） $\int x\sin x\cos x dx$　　（10） $\int (x^2-1)\sin 2x dx$

（11）$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$　　（12）$\int e^x \sin^2 x dx$

（13）$\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$　　（14）$\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

2．已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $e^{-x^2}$，求 $\int xf'(x)dx$.

3．已知 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，求 $\int xf''(x)dx$.

## 4.4　几中特殊类型函数的积分

### 一、有理函数的积分

有理函数（或称有理分式），是指由两个多项式的商所表示的函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}. \tag{1}$$

其中 $m$ 和 $n$ 都是非负整数；$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都是实数，且 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$.

总是假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 没有公因式. 当 $P(x)$ 的次数 $n$ 小于 $Q(x)$ 的次数 $m$ 时，称这有理函数是真分式；当 $n \geqslant m$ 时，称它为假分式. 用多项式的除法可把假分式化成一个多项式与一个真分式之和.

例如：$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$.

多项式可以很容易地逐项积分，而要计算真分式的积分，需要用到真分式的下列性质：

实系数多项式 $Q(x)$ 在实数范围内总可以分解一次因式和二次因式的乘积

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}.$$

其中 $p^2-4q<0, \cdots, r^2-4s<0$，那么真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解成如下形式的部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots\\ &\frac{B_1}{x-a}+\frac{B_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-a)^\beta}\\ &+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}\cdots\end{aligned}$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}. \qquad (2)$$

其中$A_i$，…，$B_i$，$M_i$，$N_i$，…，$R_i$及$S_i$都是常数.

这里应注意下列两点：

（1）分母$Q(x)$中如果有因子$(x-a)^k$，那么分解后有下列$k$个部分分式之和：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}. \qquad (3)$$

特别的，当$k=1$时，分解后只有一项$\frac{A}{x-a}$.

（2）分母$Q(x)$中如果有因子$(x^2+px+q)^k$（其中$p^2-4q<0$），那么分解后有下列$k$个部分分式之和：

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}. \qquad (4)$$

特别的，当$k=1$时，分解后只有一项$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

例如真分式可分解为

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

其中$A$，$B$为待定系数. 可以用如下的方法求出待定系数：

第一种方法（比较系数法），两端取分母后，得

$$x+3=A(x+3)+B(x-2), \qquad (5)$$

即 $x+3=(A+B)x-(3A+2B)$.

由于这是恒等式，因此两端的多项式中同次幂的系数必须分别相等，于是有$\begin{cases}A+B=1\\-(3A+2B)=3\end{cases}$，从而解得$A=-5$，$B=6$.

第二种方法（赋值法），在恒等式（5）中，代入特殊的$x$值，从而求出待定系数.

令$x=2$，得$A=-5$；令$x=3$，得$B=6$.

由于（5）式中的待定系数有且仅有一组解，因此这种方法所求得的数值必合所求. 于是同样得到

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

又如真分式$\frac{1}{x(x-1)^2}$可分解成

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2},$$

再求待定系数 $A$，$B$，$C$．分解式去分母后得

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx\,. \tag{6}$$

令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $C=1$．

比较（6）式两端 $x^2$ 项的系数，有

$$0=A+B\,.$$

由 $A=1$，得 $B=-1$．

于是
$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

再如，真分式 $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$ 可分解成

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\,.$$

两端去分母，合并同类项，有

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)=(A+2B)x^2+(B+2C)x+(A+C)\,.$$

比较两端同次幂的系数，有 $\begin{cases}A+2B=0\\A+2C=0\,,\\A+C=1\end{cases}$

解得

$$A=\frac{4}{5},\ B=-\frac{2}{5},\ C=\frac{1}{5}\,.$$

于是

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\,.$$

以上介绍的方法称为把真分式分解为部分分式的待定系数法．当把一个有理函数分解为一个多项式及一些部分分式之和以后，只出现多项式、$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ 及 $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ 这三类函数，其中前两类函数的积分很简单，下面讨论积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x\,.$$

我们先把分母配方，设经配方后有

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\,,$$

又
$$Mx+N=M\left(x+\frac{p}{2}\right)+N-\frac{1}{2}Mp=M\left(x+\frac{p}{2}\right)+B\,,$$

于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\int\frac{M\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x+\int\frac{B}{\left[\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x\ .$$

当 $k=1$ 时（参看 4.2 节中的例 6），有

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{B}{a}\arctan\frac{2x+p}{2a}+C\ ;$$

当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\frac{-M}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}+\int\frac{B}{\left[\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x\ .$$

为求上式右端的积分，可令 $x+\dfrac{p}{2}=a\tan t$，有

$$\int\frac{B}{\left[\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2\right]^k}\mathrm{d}x=\int\frac{Ba\sec^2 t}{a^{2k}\sec^{2k}t}\mathrm{d}t=\frac{B}{a^{2k-1}}\int\cos^{2k-2}t\mathrm{d}t\ .$$

这样化成类如 4.2 节例 16 的积分，即可积出.

**例 1**　求 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ .

**解**　因为 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$，

所以

$$\begin{aligned}\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x=-5\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x\\&=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C\ .\end{aligned}$$

**例 2**　求 $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$ .

**解**　由于分母已为二次质因式，分子可写为 $x-2=\dfrac{1}{2}(2x+2)-3$，

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\ .$$

**例 3** 求 $\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$ .

**解** 因为 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ ,

所以
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x&=\int[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}]\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C\\&=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$

**例 4** 求 $\int\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ .

**解** 因为
$$\begin{aligned}\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4-1+2}{(x^2+1)^2}&=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}\\&=1-\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}\ ,\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x&=\int\left[1-\frac{2}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=x-2\arctan x+\int\frac{2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

对右端积分 $\int\frac{2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ 可利用换元法，设 $x=\tan t$ ，
$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x&=x-2\arctan x+\frac{x}{x^2+1}+\arctan x+C\\&=x+\frac{x}{x^2+1}-\arctan x+C\ .\end{aligned}$$

**例 5** 求 $\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$ .

**解** 根据分解式（2），计算得 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$ ,

于是

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{2}{1+2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2) + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C\ .$$

## 二、三角函数有理式的积分

所谓三角函数有理式是指由三角函数经有限次四则运算所构成的函数．它可化为有理函数的积分．

**例 6** 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$ .

**解** 由三角学知道，$\sin x$ 与 $\cos x$ 都可以用 $\tan\frac{x}{2}$ 的有理式表示，即

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ ,$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\ .$$

如果作变量代换 $u = \tan\frac{x}{2}$，而 $x = 2\arctan u$ ，可得

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\ ,\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\ .$$

因此得

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+2+\frac{1}{u})\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|+C.$$

由于任何三角函数均可用正弦函数与余弦函数的有理式表示，所以变量代换 $u=\tan\frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的积分都可以应用．不过对某些特殊的三角函数有理式的积分来说，这种变量代换不一定是最简捷的代换．例如求积分

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x,$$

只要设 $u=1+\sin x$，即得

$$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin x)}{1+\sin x}=\ln(1+\sin x)+C.$$

## 三、简单无理函数的举例

下面举一些被积函数中含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的积分的例子．

**例 7** 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$．

**解** 令 $\sqrt[3]{x+2}=u$，则 $x=u^3-2$，$\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}&=\int\frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u\\&=3\int\frac{u^2-1+1}{1+u}\mathrm{d}u\\&=3\int\left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u\\&=3\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|1+u|\right)+C\\&=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C.\end{aligned}$$

**例 8** 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$．

**解** 为了同时消去两个根式 $\sqrt[3]{x}$ 及 $\sqrt{x}$，令 $x=t^6$，得 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，代入得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}&=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=6(t-\arctan t)+C=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.\end{aligned}$$

**例 9** 求 $\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$．

**解** 令 $u=\sqrt{x-1}$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=2\int\frac{u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u=2\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2(u-\arctan u)+C$$
$$=2(\sqrt{x-1}-\arctan\sqrt{x-1})+C.$$

**例 10** 求 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

**解** 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则 $\frac{1+x}{x}=t^2$， $x=\frac{1}{t^2-1}$， 于是

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=\int(t^2-1)\cdot t\cdot\left[-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$
$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$
$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-2t+\ln\frac{t+1}{t-1}+C$$
$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}+C$$
$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+C.$$

## 习题 4-4

求下列不定积分.

（1）$\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$

（2）$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$

（4）$\int\frac{x+1}{(x-1)^3}\mathrm{d}x$

（5）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$

（6）$\int\frac{1}{x^2-2x-15}\mathrm{d}x$

（7）$\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$

（8）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

（9）$\int\frac{x^2+5}{x^2+1}\mathrm{d}x$

（10）$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$

（11）$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$　　　　（12）$\int \frac{3x}{x^3-1}\mathrm{d}x$

（13）$\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$

## 4.5　积分表的使用

通过前面的讨论可以看出，积分的计算来得灵活、复杂．为了使用方便，往往把常用的积分公式汇集成表，叫做积分表．积分表是按照被积函数的类型来排列的．求积分时，可根据被积函数的类型直接地或经过简单变形后，在表中查得所需的结果．

先举两个可以直接从积分表中查得结果的例子．

**例 1**　求 $\int \sqrt{x^2-4x+8}\mathrm{d}x$ ．

**解**　被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ，在附录的积分表（七）中查得公式 59．

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C .$$

现在 $a=1$ ， $b=-4$ ， $c=8$ ，于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-4x+8}\mathrm{d}x&=\frac{2x-4}{4}\sqrt{x^2-4x+8}+\frac{32-16}{8}\ln\left|2x-4+2\sqrt{x^2-4x+8}\right|+C\\&=\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+8}+2\ln\left|2x-4+2\sqrt{x^2-4x+8}\right|+C\\&=\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+8}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right|+C_1 .\end{aligned}$$

其中 $C_1=2\ln 2+C$ ．

**例 2**　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$ ．

**解**　被积函数含有三角函数，在附录的积分表（九）中查得关于积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ 的公式，但公式有两个，看看 $a^2>b^2$ 或 $a^2<b^2$ 而决定用哪一个，现在 $a=5$ ， $b=-4$ ， $a^2>b^2$ ，所以用公式 92

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C ,$$

于是

$$\int \frac{dx}{5-4\cos x} = \frac{2}{5+(-4)}\sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}}\arctan\left(\frac{5-(-4)}{5+(-4)}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(9\tan\frac{x}{2}\right)+C .$$

下面举一个需要进行变量代换，然后再查积分表的例子.

**例 3** 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$ .

**解** 这个积分不能在表中直接查到，需要先进行变量代换.

令 $2x = u$ ，那么 $\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{u^2+3^2}$ ，于是 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}$ .

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$ ，在附录的积分表（五）中查到公式 40

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|}+C .$$

现在 $a=3$ ， $x$ 相当于 $u$ ，于是

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C ,$$

再以 $u=2x$ 代入，最后得到

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|}+C \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|}+C \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{|x|}+C_1 .\end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \frac{1}{3}\ln 2$ .

最后，举一个用递推公式求积分的例子.

**例 4** 求 $\int \sin^4 x dx$ .

**解** 在附录的积分表（九）中查到公式 82

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx ,$$

现在 $n=4$ ，于是

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\mathrm{d}x .$$

对积分 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$ 再次使用积分公式 82，此时 $n=2$，有

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C ,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C .$$

**注意：**对积分 $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$，也可以直接使用附录的积分表（九）的公式 80

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

一般来说，查积分表可以节省计算积分的时间，不过只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表．对一些比较简单的积分，应用基本积分方法来计算有时要比查表更快些，例如对 $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$，用变换 $u=\sin x$ 很快就可得到结果，所以，求积分时究竟是直接计算还是查表，或是两者结合使用，应该视具体情况而定．

在本章结束之前，我们还要指出：对初等函数来说，在其定义区间内，它的原函数存在，但不一定是初等函数．如 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$ 等，都不是初等函数．

## 习题 4-5

1．利用积分表计算下列不定积分．

（1）$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$ （2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$

（3）$\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$ （4）$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^2}$

（5）$\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\mathrm{d}x$ （6）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$

（7）$\int \cos^6 x\mathrm{d}x$ （8）$\int \frac{x+5}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$

## 总习题四

求下列不定积分（其中 $a$，$b$ 为常数）．

（1）$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$　　（2）$\int \frac{x}{(1-x)^3} dx$

（3）$\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx$　（$a > 0$）　　（4）$\int \frac{1+\cos x}{x + \sin x} dx$

（5）$\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$　　（6）$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$

（7）$\int \tan^4 x dx$　　（8）$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

（9）$\int \frac{dx}{x(x^6 + 4)}$　　（10）$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$　（$a > 0$）

（11）$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$　　（12）$\int x \cos^2 x dx$

（13）$\int e^{ax} \cos bx dx$　　（14）$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

（15）$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$　　（16）$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$

（17）$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}$　　（18）$\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$

（19）$\int \ln(1 + x^2) dx$　　（20）$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$

（21）$\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx$　　（22）$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

**数学家简介【4】**

## 欧洲最伟大的数学家——拉格朗日

约瑟夫·拉格朗日（Joseph Louis Lagrange），法国数学家、物理学家．他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出．

（1）生平．

拉格朗日 1736 年 1 月 25 日生于意大利西北部的都灵．父亲是法国陆军骑兵里的一名军官，后由于经商破产，家道中落．据拉格朗日本人回忆，如果幼年家境富裕，他也就不会作数学研究了，因为父亲一心想把他培养成为一名律师．拉格朗日个人却对法律毫无兴趣．

到了青年时代，在数学家雷维里的教导下，拉格朗日喜爱上了几何学．17 岁时，他读了英国天文学家哈雷的介绍的牛顿微积分成就的短文《论分析方法的优点》后，感觉到“分析才是自己最热爱的学科”，从此他迷上了数学分析，开始专攻当时迅速发展的数学分析．

18 岁时，拉格朗日用意大利语写了第一篇论文，是用牛顿二项式定理处理两函数乘积的高阶微商，他又将论文用拉丁语写出寄给了当时在柏林科学院任职的数学家欧拉．不久后，他获知这一成果早在半个世纪前就被莱布尼兹取得了．这个并不幸运的开端并未使拉格朗日灰心，相反，更坚定了他投身数学分析领域的信心．

1755 年拉格朗日 19 岁时，在探讨数学难题“等周问题”的过程中，他以欧拉的思路和结果为依据，用纯分析的方法求变分极值．第一篇论文《极大和极小的方法研究》，发展了欧拉所开创的变分法，为变分法奠定了理论基础．变分法的创立，使拉格朗日在都灵声名大震，并使他在 19 岁时就当上了都灵皇家炮兵学校的教授，成为当时欧洲公认的第一流数学家．1756 年，受欧拉的举荐，拉格朗日被任命为普鲁士科学院通讯院士．

1766 年德国的腓特烈大帝向拉格朗日发出邀请时说，在“欧洲最大的王”的宫廷中应有“欧洲最大的数学家”．于是他应邀前往柏林，任普鲁士科学院数学部主任，居住达 20 年之久，开始了他一生科学研究的鼎盛时期．在此期间，他完成了《分析力学》一书，这是牛顿之后的一部重要的经典力学著作．书中运用变分原理和分析的方法，建立起完整和谐的力学体系，使力学分析化了．他在序言中宣称：力学已经成为分析的一个分支．

1783 年，拉格朗日的故乡建立了“都灵科学院”，他被任命为名誉院长．1786 年腓特烈大帝去世以后，他接受了法王路易十六的邀请，离开柏林，定居巴黎，直至去世．

这期间他参加了巴黎科学院成立的研究法国度量衡统一问题的委员会，并出任法国米制委员会主任．1799 年，法国完成统一度量衡工作，制定了被世界公认的长度、面积、体积、质量的单位，拉格朗日为此做出了巨大的努力．

1791 年，拉格朗日被选为英国皇家学会会员，又先后在巴黎高等师范学院和巴黎综合工科学校任数学教授．1795 年建立了法国最高学术机构——法兰西研究院后，拉格朗日被选为科学院数理委员会主席．此后，他才重新进行研究工作，编写了一批重要著作：《论任意阶数值方程的解法》、《解析函数论》和《函数计算讲义》，总结了那一时期的特别是他自己的一系列研究工作．

1813 年 4 月 3 日，拿破仑授予他帝国大十字勋章，但此时的拉格朗日已卧床不起，4 月 11 日早晨，拉格朗日逝世．

（2）数学方面的成就．

拉格朗日科学研究所涉及的领域极其广泛．他在数学上最突出的贡献是使数学分析与几何与力学脱离开来，使数学的独立性更为清楚，从此数学不再仅仅是

其他学科的工具.

拉格朗日总结了 18 世纪的数学成果，同时又为 19 世纪的数学研究开辟了道路，堪称法国最杰出的数学大师. 在柏林工作的前十年，拉格朗日把大量时间花在代数方程和超越方程的解法上，作出了有价值的贡献，推动了代数学的发展. 他提交给柏林科学院两篇著名的论文:《关于解数值方程》和《关于方程的代数解法的研究》. 把前人解三四次代数方程的各种解法，总结为一套标准方法，即把方程化为低一次的方程（称辅助方程或预解式）以求解.

他试图寻找五次方程的预解函数，希望这个函数是低于五次方程的解，但未获得成功. 然而，他的思想已蕴含着置换群概念，对后来阿贝尔和伽罗华起到启发性作用，最终解决了高于四次的一般方程为何不能用代数方法求解的问题. 因而也可以说拉格朗日是群论的先驱.

在数论方面，拉格朗日也显示出非凡的才能. 他对费马提出的许多问题作出了解答. 例如，一个正整数是不多于 4 个平方数的和的问题等，他还证明了圆周率的无理性. 这些研究成果丰富了数论的内容.

在《解析函数论》以及他早在 1772 年的一篇论文中，在为微积分奠定理论基础方面作了独特的尝试，他企图把微分运算归结为代数运算，从而抛弃自牛顿以来一直令人困惑的无穷小量，并想由此出发建立全部分析学. 但是由于他没有考虑到无穷级数的收敛性问题，他自以为摆脱了极限概念，其实只是回避了极限概念，并没有能达到他想使微积分代数化、严密化的目的. 不过，他用幂级数表示函数的处理方法对分析学的发展产生了影响，成为实变函数论的起点.

近百余年来，数学领域的许多新成就都可以直接或间接地溯源于拉格朗日的工作. 所以他在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一.