第 4 章　李亚普诺夫稳定性

4.1　引言

一个自动控制系统当受到外界干扰时，它的平衡状态被破坏，但在外界干扰去掉后，它能自动地回到平衡状态下继续工作，系统的这种性能，称为稳定性。

具有稳定性的系统称为稳定系统。反之为不稳定系统。

1892 年，伟大的俄国数学力学家亚历山大·米哈依诺维奇·李亚普诺夫（A. M. Lyapunov）（1857－1918）经过精心研究，创造性地发表了其博士论文《运动稳定性的一般问题》，给出了稳定性概念的严格数学定义，并提出了解决稳定性问题的方法，从而奠定了现代稳定性理论的基础。

可以应用于线性定常系统的稳定性分析方法很多。然而，对于非线性系统和线性时变系统，这些稳定性分析方法实现起来可能非常困难，甚至是不可能的。李亚普诺夫（Lyapunov）稳定性分析是解决非线性系统稳定性问题的一般方法。

虽然在非线性系统的稳定性问题中，Lyapunov 稳定性分析方法具有基础性的地位，但在具体确定许多非线性系统的稳定性时，却并不是直截了当的。技巧和经验在解决非线性问题时显得非常重要。在本章中，对于实际非线性系统的稳定性分析仅限于几种简单的情况。

本章首先介绍 Lyapunov 意义下的稳定性定义，给出 Lyapunov 稳定性定理，并将其应用于非线性系统的稳定性分析。然后讨论线性系统的 Lyapunov 稳定性分析问题。

4.2　Lyapunov 意义下的稳定性问题

对于一个给定的控制系统，稳定性分析通常是最重要的。如果系统是线性定常的，那么有许多稳定性判据，如 Routh-Hurwitz 稳定性判据和 Nyquist 稳定性判据等可以利用。然而，如果系统是非线性的，或是线性时变的，则上述稳定性判据就将不再适用。

本节所要介绍的 Lyapunov 第二法（也称 Lyapunov 直接法）是确定非线性系统和线性时变系统的最一般的方法。当然，这种方法也可适用于线性定常系统的稳定性分析。此外，它还可应用于线性二次型最优控制等问题。

4.2.1　平衡状态、给定运动与扰动方程之原点

考虑如下非线性系统：

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{4.1}$$

其中 x 为 n 维状态向量，$f(x,t)$ 是变量 x_1，x_2，…，x_n 和 t 的 n 维向量函数。假设在给定的初始条件下，式（4.1）有唯一解 $\varPhi(t;x_0,t_0)$。当 $t=t_0$ 时，$x=x_0$。于是

$$\Phi(t_0;x_0,t_0)=x_0$$

在（4.1）的系统中，若存在

$$f(x_e,t)\equiv 0\,,\quad \forall t \tag{4.2}$$

则称 x_e 为系统的平衡状态或平衡点。

如果系统是线性定常的，也就是说 $f(x,t)=Ax$，则当 A 为非奇异矩阵时，系统存在一个唯一的平衡状态；当 A 为奇异矩阵时，系统将存在无穷多个平衡状态。对于非线性系统，可有一个或多个平衡状态，这些状态对应于系统的常值解（对所有 t，总存在 $x=x_e$）。平衡状态的确定不包括（4.1）的系统微分方程的解，只涉及（4.2）的解。

任意一个孤立的平衡状态（即彼此孤立的平衡状态）或给定运动 $x=g(t)$ 都可通过坐标变换，统一化为扰动方程 $\dot{\tilde{x}}=\tilde{f}(\tilde{x},t)$ 的坐标原点，即 $f(0,t)=0$ 或 $x_e=0$。在本章中，不失一般性，将仅讨论扰动方程关于原点 $x_e=0$ 处之平衡状态的稳定性问题。这种“原点稳定性问题”由于使问题得到极大简化，而不会丧失一般性，从而为稳定性理论的建立奠定了坚实的基础，这也是 Lyapunov 的一个重要贡献。

4.2.2　Lyapunov 意义下的稳定性定义

下面首先给出 Lyapunov 意义下的稳定性定义，然后回顾某些必要的数学基础，以便在 4.3 节具体给出 Lyapunov 稳定性定理。

定义 4.1　（Lyapunov 意义下的稳定）设系统

$$\dot{x}=f(x,t)\,,\quad f(x_e,t)\equiv 0$$

的平衡状态 $x_e=0$ 的 H 邻域为

$$\|x-x_e\|\leqslant H$$

其中 $H>0$，$\|\cdot\|$ 为向量的 2 范数或欧几里德范数，即

$$\|x-x_e\|=[(x_1-x_{1e})^2+(x_2-x_{2e})^2+\cdots+(x_n-x_{ne})^2]^{1/2}$$

类似地，也可以相应定义球域 $S(\varepsilon)$ 和 $S(\delta)$。

在 H 邻域内，若对于任意给定的 $0<\varepsilon<H$，均有：

（1）如果对应于每一个 $S(\varepsilon)$，存在一个 $S(\delta)$，使得当 t 趋于无穷时，始于 $S(\delta)$ 的轨迹不脱离 $S(\varepsilon)$，则系统（4.1）的平衡状态 $x_e=0$ 称为在 Lyapunov 意义下是稳定的。一般地，实数 δ 与 ε 有关，通常也与 t_0 有关。如果 δ 与 t_0 无关，则此时平衡状态 $x_e=0$ 称为一致稳定的平衡状态。

以上定义意味着：首先选择一个域 $S(\varepsilon)$，对应于每一个 $S(\varepsilon)$，必存在一个域 $S(\delta)$，使得当 t 趋于无穷时，始于 $S(\delta)$ 的轨迹总不脱离域 $S(\varepsilon)$。

（2）如果平衡状态 $x_e=0$，在 Lyapunov 意义下是稳定的，并且始于域 $S(\delta)$ 的任一条轨迹，当时间 t 趋于无穷时，都不脱离 $S(\varepsilon)$，且收敛于 $x_e=0$，则称系统（4.1）的平衡状态 $x_e=0$ 为渐近稳定的，其中球域 $S(\delta)$ 被称为平衡状态 $x_e=0$ 的吸引域。

实际上，渐近稳定性比纯稳定性更重要。考虑到非线性系统的渐近稳定性是一个局部概念，所以简单地确定渐近稳定性并不意味着系统能正常工作。通常有必要确定渐近稳定性的最大范围或吸引域。它是发生渐近稳定轨迹的那部分状态空间。换句话说，发生于吸引域内的每

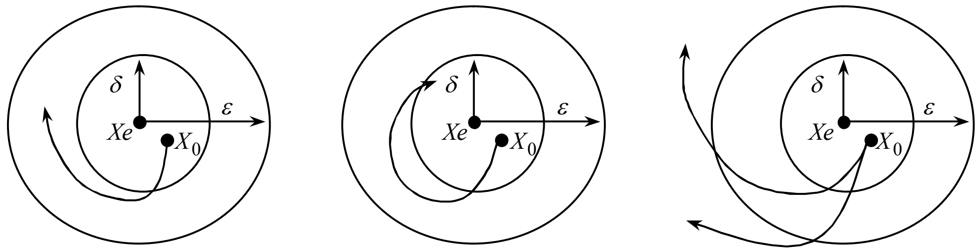
一个轨迹都是渐近稳定的。

（3）对所有的状态（状态空间中的所有点），如果由这些状态出发的轨迹都保持渐近稳定性，则平衡状态 $x_e = 0$ 称为大范围渐近稳定。或者说，如果系统（4.1）的平衡状态 $x_e = 0$ 渐近稳定的吸引域为整个状态空间，则称此时系统的平衡状态 $x_e = 0$ 为大范围渐近稳定的。显然，大范围渐近稳定的必要条件是在整个状态空间中只有一个平衡状态。

在控制工程问题中，总希望系统具有大范围渐近稳定的特性。如果平衡状态不是大范围渐近稳定的，那么问题就转化为确定渐近稳定的最大范围或吸引域，这通常非常困难。然而，对所有的实际问题，如能确定一个足够大的渐近稳定的吸引域，以致扰动不会超过它就可以了。

（4）如果平衡状态 $x_e = 0$ 既不是渐近稳定的，也不是稳定的，当时间 t 趋于无穷时，从 x_0 出发的运动轨迹最终超越 $S(\varepsilon)$，则称平衡状态 x_e 是不稳定的。

李亚普诺夫稳定性的含义可以在二维平面中直观表示出来，如图 4.1 所示，图 4.1（a）、（b）和（c）分别表示平衡状态及对应于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的典型轨迹。在图 4.1（a）、（b）和（c）中可以看到，域 $S(\delta)$制约着初始状态 x_0，而域 $S(\varepsilon)$ 是起始于 x_0 的轨迹的边界。



（a）稳定　　（b）渐进稳定　　（c）不稳定

图 4.1　李亚普诺夫稳定性示意图

参数 δ、ε 的物理意义：ε 是一个给定的稳定性指标，最终偏差小于它，则稳定；而 δ 则描述了稳定域的大小，即系统稳定的范围，或能忍受的最大干扰。当初始状态与平衡状态的偏差小于它时，则稳定。对于渐近稳定，实际上就是将稳定性指标取为 $\varepsilon = 0$，即要求系统最终状态完全回到平衡状态。

注意，由于上述定义不能详细地说明可容许初始条件的精确吸引域，因而除非 $S(\varepsilon)$对应于整个状态平面，否则这些定义只能应用于平衡状态的邻域。

此外，在图 4.1（c）中，轨迹离开了 $S(\varepsilon)$，这说明平衡状态是不稳定的。然而却不能说明轨迹将趋于无穷远处，这是因为轨迹还可能趋于在 $S(\varepsilon)$外的某个极限环（如果线性定常系统是不稳定的，则在不稳定平衡状态附近出发的轨迹将趋于无穷远。但在非线性系统中，这一结论并不一定正确）。

上述各定义的内容，对于理解本章介绍的线性和非线性系统的稳定性分析，是最低限度的要求。注意，这些定义不是确定平衡状态稳定性概念的唯一方法。实际上，在其他文献中还有另外的定义。

对于线性系统，渐近稳定等价于大范围渐近稳定。但对于非线性系统，是否大范围渐近稳定需具体分析。

最后指出，在经典控制理论中已经学过的稳定性概念与 Lyapunov 意义下的稳定性概念是有一定的区别的。两者的区别在于经典控制理论中只有渐近稳定的系统才称为稳定的系统。在 Lyapunov 意义下是稳定的，但却不是渐近稳定的系统，则叫做不稳定系统。

4.2.3 预备知识

（1）纯量函数的正定性。

如果对所有在域Ω中的非零状态 $x \neq 0$，有 $V(x) > 0$，且在 x=0 处有 $V(0)$=0，则在域Ω（域Ω包含状态空间的原点）内的纯量函数 $V(x)$ 称为正定函数。

如果时变函数 $V(x,t)$ 由一个定常的正定函数作为下限，即存在一个正定函数 $V(x)$，使得

$$V(x,t) > V(x)\text{，} \qquad \text{对所有 } t \geqslant t_0$$
$$V(0,t) = 0\text{，} \qquad \text{对所有 } t \geqslant t_0$$

则称时变函数 $V(x,t)$ 在域Ω（Ω包含状态空间原点）内是正定的。

（2）纯量函数的负定性。

如果 $-V(x)$ 是正定函数，则纯量函数 $V(x)$ 称为负定函数。

（3）纯量函数的正半定性。

如果纯量函数 $V(x)$ 除了在原点以及某些状态下等于零外，在域Ω内其他的所有状态都是正定的，则 $V(x)$ 称为正半定纯量函数。

（4）纯量函数的负半定性。

如果 $-V(x)$ 是正半定函数，则纯量函数 $V(x)$ 称为负半定函数。

（5）纯量函数的不定性。

如果在域Ω内，不论域Ω多么小，$V(x)$ 既可为正值，也可为负值，则纯量函数 $V(x)$ 称为不定的纯量函数。

例 4.1 本例给出按照以上分类的几种纯量函数。假设 x 为二维向量。

① $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ 正定的

② $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ 正半定的

③ $V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$ 负定的

④ $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ 不定的

⑤ $V(x) = x_1^2 + \dfrac{2x_2^2}{1+x_2^2}$ 正定的

（6）二次型。

建立在 Lyapunov 第二法基础上的稳定性分析中，有一类纯量函数起着很重要的作用，即二次型函数。例如

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

这里 x 为实向量，P 为实对称矩阵。

（7）复二次型或赫米特（Hermite）型。

如果 x 是 n 维复向量，P 为 Hermite 矩阵，则该复二次型函数称为 Hermite 型函数。例如

$$V(x)=x^{\mathrm{H}}Px=[\bar{x}_1\quad \bar{x}_2\quad \cdots\quad \bar{x}_n]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_{n1} & \bar{p}_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

在状态空间的稳定性分析中，经常使用 Hermite 型，而不使用二次型，这是因为 Hermite 型比二次型更具一般性（对于实向量 x 和实对称矩阵 P，Hermite 型 $x^{\mathrm{H}}Px$ 等于二次型 $x^{\mathrm{T}}Px$）。

二次型或者 Hermite 型 $V(x)$ 的正定性可用赛尔维斯特准则判断。该准则指出，二次型或 Hermite 型 $V(x)$ 为正定的充要条件是矩阵 P 的各阶主子行列式均为正值，即

$$p_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ \bar{p}_{12} & p_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \bar{p}_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{p}_{n1} & \bar{p}_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}>0$$

注意，$\bar{p}_{ij}$ 是 p_{ij} 的复共轭。对于二次型，$\bar{p}_{ij}=p_{ij}$。

如果 P 是奇异矩阵，且它的所有主子行列式均非负，则 $V(x)=x^{\mathrm{H}}Px$ 是正半定的。

如果 $-V(x)$ 是正定的，则 $V(x)$ 是负定的。同样，如果 $-V(x)$ 是正半定的，则 $V(x)$ 是负半定的。

例 4.2 试证明下列二次型是正定的。

$$V(x)=10x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_1x_3$$

解 二次型 $V(x)$ 可写为

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px=[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

利用赛尔维斯特准则，可得

$$10>0,\quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}>0$$

因为矩阵 P 的所有主子行列式均为正值，所以 $V(x)$ 是正定的。

4.3 Lyapunov 稳定性理论

1892 年，Lyapunov 提出了两种方法（称为第一法和第二法），用于确定由常微分方程描述的动力学系统的稳定性。

第一法包括了利用微分方程显式解进行系统分析的所有步骤。基本思路是：求解系统的微分方程式，根据解的性质或特征方程的根的情况来判据稳定性。系统特征方程为负实数根或负实部的虚根，则系统稳定。

对于非线性系统，只能根据在平衡点近似线性化的方程来研究。首先将非线性系统线性化，然后计算线性化方程的特征值，判定原非线性系统的稳定性。

第二法不需求出微分方程的解，也就是说，采用 Lyapunov 第二法，可以在不求出状态方程解的条件下，确定系统的稳定性。对于非线性系统和线性时变系统，求解状态方程通常十分困难，所以这种方法显示出极大的优越性。

尽管采用 Lyapunov 第二法分析非线性系统的稳定性时，需要相当的经验和技巧，然而当其他方法无效时，这种方法却能解决非线性系统的稳定性分析问题。

4.3.1 Lyapunov 第二法

由力学经典理论可知，对于一个振动系统，当系统总能量（正定函数）连续减小（这意味着总能量对时间的导数必然是负定的），直到平衡状态时为止，则振动系统是稳定的。

Lyapunov 第二法是建立在更为普遍的情况之上的，其物理意义为：如果系统有一个渐近稳定的平衡状态，则当其运动到平衡状态的吸引域内时，系统存储的能量随着时间的增长而衰减，直到在平稳状态达到极小值为止。

然而对于一些纯数学系统，毕竟还没有一个准确定义“能量函数”的简便方法。为了克服这个困难，Lyapunov 引入了一个虚构的能量函数，称为 Lyapunov 函数。当然，这个函数无疑比能量更为一般，并且其应用也更广泛。实际上，任一纯量函数只要满足 Lyapunov 稳定性定理（见本节后文）的假设条件，都可作为 Lyapunov 函数。

Lyapunov 函数与 x_1，x_2，…，x_n 和 t 有关，一般用 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 或者 $V(x,t)$ 来表示。如果在 Lyapunov 函数中不含时间 t，则用 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 或 $V(x)$ 表示。在 Lyapunov 第二法中，直接根据 $V(x,t)$ 和其对时间的导数 $\dot{V}(x,t)=\mathrm{d}V(x,t)/\mathrm{d}t$ 的定号性，判断平衡状态处的稳定性、渐近稳定性或不稳定性，而不必直接求出方程的解。因此既适用于线性系统，也适用于非线性系统。

一、关于渐近稳定性

可以证明：如果 x 为 n 维向量，且其纯量函数 $V(x)$ 正定，则满足

$$V(x)=C$$

的状态 x 处于 n 维状态空间的封闭超曲面上，且至少处于原点附近，其中 C 是正常数。随着 $\|x\|\to\infty$，上述封闭曲面可扩展为整个状态空间。如果 $C_1<C_2$，则超曲面 $V(x)=C_1$ 完全处于超曲面 $V(x)=C_2$ 的内部。

对于给定的系统，若可求得正定的纯量函数 $V(x)$，并使其沿轨迹对时间的导数总为负值，则随着时间的增加，$V(x)$ 将取越来越小的 C 值。随着时间的进一步增长，最终 $V(x)$ 变为零，而 x 也趋于零。这意味着，状态空间的原点是渐近稳定的。Lyapunov 主稳定性定理就是这一原理的普遍化，它给出了渐近稳定的充要条件。该定理阐述如下：

定理 4.1 考虑如下非线性系统

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t)$$

其中

$$f(0,t)\equiv 0，对所有 t\geqslant t_0$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(x,t)$，且满足以下条件：

（1）$V(x,t)$ 正定；

（2）$\dot{V}(x,t)$ 负定。

则在原点处的平衡状态是（一致）渐近稳定的。

进一步地，若当$\|x\|\to\infty$时，有$V(x,t)\to\infty$，则在原点处的平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

例 4.3 考虑如下非线性系统

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

显然原点($x_1 = 0$, $x_2 = 0$)是唯一的平衡状态。试确定其稳定性。

解 选择存在一阶连续偏导数的 Lyapunov 函数为

$$V(x,t) = x_1^2 + x_2^2$$

显然正定。且

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

显然是负定的。

又因为$\|x\|\to\infty$时，显然$V(x,t)\to\infty$。

因此根据定理 4.1，该系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

若使$V(x)$取一系列的常值0，C_1，C_2，…（$0<C_1<C_2<\cdots$），则$V(x)$=0 对应于状态平面的原点，而$V(x)=C_1$，$V(x)=C_2$ …描述了包围状态平面原点的互不相交的一簇圆，如图 4.2 所示。还应注意，由于$V(x)$在径向是无界的，即随着$\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$，所以这一簇圆可扩展到整个状态平面。

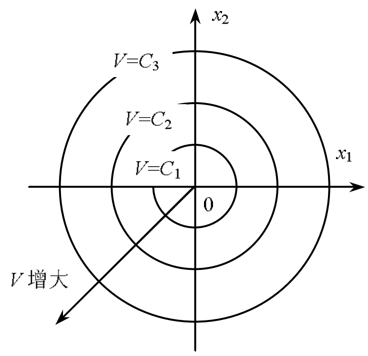


图 4.2 常数 V 圆和典型轨迹

由于圆$V(x)=C_k$完全处在$V(x)=C_{k+1}$的内部，所以典型轨迹从外向里通过 V 圆的边界。因此 Lyapunov 函数的几何意义可阐述为：$V(x)$表示状态 x 到状态空间原点距离的一种度量。如果原点与瞬时状态 $x(t)$之间的距离随 t 的增加而连续地减小（即$\dot{V}(x(t))<0$），则$x(t)\to 0$。

定理 4.1 是 Lyapunov 第二法的基本定理，下面对这一重要定理作几点说明。

（1）定理 4.1 仅给出了充分条件，也就是说，如果构造得到了合适的 Lyapunov 函数$V(x,t)$，那么系统是渐近稳定的。但如果未找到这样的 Lyapunov 函数，并不能给出任何结论，

例如不能据此说该系统是不稳定的。

（2）对于渐近稳定的平衡状态，则 Lyapunov 函数必然存在。

（3）对于非线性系统，通过构造某个具体的 Lyapunov 函数，可以证明系统在某个稳定域内是渐近稳定的，但这并不意味着稳定域外的运动是不稳定的。

（4）对于线性系统，如果存在渐近稳定的平衡状态，则它必定是大范围渐近稳定的。

（5）稳定性定理 4.1 既适合于线性系统、非线性系统，也适合于定常系统、时变系统，具有极其一般的普遍意义。

显然，定理 4.1 仍有一些限制条件，比如 $\dot{V}(x,t)$ 必须是负定函数。如果在 $\dot{V}(x,t)$ 上附加一个限制条件，即除了原点以外，沿任一轨迹 $\dot{V}(x,t)$ 均不恒等于零，则要求 $\dot{V}(x,t)$ 负定的条件可用 $\dot{V}(x,t)$ 取负半定的条件来代替。

定理 4.2　考虑如下非线性系统

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t)$$

其中

$$f(0,t)\equiv 0，\text{对所有}\ t\geqslant t_0$$

若存在具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(x,t)$，且满足以下条件：

（1）$V(x,t)$ 是正定的；

（2）$\dot{V}(x,t)$ 是负半定的；

（3）$\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$ 对于任意 t_0 和任意 $x_0\neq 0$，在 $t\geqslant t_0$ 时，不恒等于零，其中的 $\Phi(t;x_0,t_0)$ 表示在 t_0 时从 x_0 出发的轨迹或解。

则在系统原点处的平衡状态是渐近稳定的。进一步地，若当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $V(x,t)\to\infty$，则在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

注意，若 $\dot{V}(x,t)$ 不是负定的，而只是负半定的，则典型点的轨迹可能与某个特定曲面 $V(x,t)=C$ 相切，然而由于 $\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$ 对任意 t_0 和任意 $x_0\neq 0$，在 $t\geqslant t_0$ 时不恒等于零，所以典型点就不可能保持在切点处（在这点上，$\dot{V}(x,t)=0$），因而必然要运动到原点。

二、关于稳定性

如果存在一个正定的纯量函数 $V(x,t)$，使得 $\dot{V}(x,t)$ 始终为零，则系统可以保持在一个极限环上。在这种情况下，原点处的平衡状态称为在 Lyapunov 意义下是稳定的。

定理 4.3　考虑如下非线性系统

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t)$$

其中

$$f(0,t)\equiv 0，\text{对所有}\ t\geqslant t_0$$

若存在具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(x,t)$，且满足以下条件：

（1）$V(x,t)$ 是正定的；

（2）$\dot{V}(x,t)$ 是负半定的；

（3）$\dot{V}[\Phi(t;x_0,t_0),t]$ 对于任意 t_0 和任意 $x_0\neq 0$，在 $t\geqslant t_0$ 时，均恒等于零，其中的 $\Phi(t;x_0,t_0)$ 表示在 t_0 时从 x_0 出发的轨迹或解。

则在系统原点处的平衡状态是 Lyapunov 意义下的稳定的，但不是渐近稳定。这时系统可

保持在一个稳定的等幅振荡状态下。

三、关于不稳定性

如果系统平衡状态 $x=0$ 是不稳定的，则存在纯量函数 $V(x,t)$，可用其确定平衡状态的不稳定性。下面介绍不稳定性定理。

定理 4.4 考虑如下非线性系统

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t)$$

其中

$$f(0,t)\equiv 0，\text{对所有}\,t\geqslant t_0$$

若存在具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(x,t)$，且满足以下条件：

（1）$V(x,t)$ 在原点附近的某一邻域内是正定的；

（2）$\dot{V}(x,t)$ 在同样的邻域内是正定的。

则原点处的平衡状态是不稳定的。

4.3.2 非线性系统的稳定性

在线性定常系统中，若平衡状态是局部渐近稳定的，则它是大范围渐近稳定的，然而在非线性系统中，不是大范围渐近稳定的平衡状态可能是局部渐近稳定的。因此，线性定常系统平衡状态的渐近稳定性的含义和非线性系统的含义完全不同。

如果要检验非线性系统平衡状态的渐近稳定性，则非线性系统的线性化模型稳定性分析远远不够。必须研究没有线性化的非线性系统。有几种基于 Lyapunov 第二法的方法可达到这一目的，包括用于判断非线性系统渐近稳定性充分条件的克拉索夫斯基（Krasovski）方法、用于构成非线性系统 Lyapunov 函数的舒茨－基布逊（Schultz-Gibson）变量梯度法、用于某些非线性控制系统稳定性分析的鲁里叶（Lurie）法，以及用于构成吸引域的波波夫方法等。下面仅讨论克拉索夫斯基方法。

在非线性系统中，可能存在多个平衡状态。可通过适当的坐标变换，将所要研究的平衡状态变换到状态空间的原点。所以，可把要研究的平衡状态取为原点。克拉索夫斯基方法给出了非线性系统平衡状态渐近稳定的充分条件。现介绍克拉索夫斯基定理。

定理 4.5 （克拉索夫斯基定理）考虑如下非线性系统

$$\dot{x}=f(x)$$

其中 x 为 n 维状态向量，$f(x)$ 为 x_1，x_2，…，x_n 的非线性 n 维向量函数，假定 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 对 x_i 可微（i=1,2, …,n）。

该系统的雅可比矩阵定义为

$$F(x)=\left[\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

又定义

$$\hat{F}(x) = F^{\mathrm{H}}(x) + F(x)$$

其中 $F(x)$ 是雅可比矩阵，$F^{\mathrm{H}}(x)$ 是 $F(x)$ 的共轭转置矩阵（如果 $f(x)$ 为实向量，则 $F(x)$ 是实矩阵，且可将 $F^{\mathrm{H}}(x)$ 写为 $F^{\mathrm{T}}(x)$），此时 $\hat{F}(x)$ 显然为 Hermite 矩阵（如果 $F(x)$ 为实矩阵，则 $\hat{F}(x)$ 为实对称矩阵）。如果 Hermite 矩阵 $\hat{F}(x)$ 是负定的，则平衡状态 x=0 是渐近稳定的。该系统的 Lyapunov 函数为

$$V(x) = f^{\mathrm{H}}(x)f(x)$$

此外，若随着 $\|x\| \to \infty$，$f^{\mathrm{H}}(x)f(x) \to \infty$，则平衡状态是大范围渐近稳定的。

证明 由于 $\hat{F}(x)$ 是负定的，所以除 $x = 0$ 外，$\hat{F}(x)$ 的行列式处处不为零。因而，在整个状态空间中，除 $x = 0$ 这一点外，没有其他平衡状态，即在 $x \neq 0$ 时，$f(x) \neq 0$。因为 $f(0) = 0$，在 $x \neq 0$ 时，$f(x) \neq 0$，且 $V(x) = f^{\mathrm{H}}(x)f(x)$，所以 $V(x)$ 是正定的。

注意到

$$\dot{f}(x) = F(x)\dot{x} = F(x)f(x)$$

因此

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^{\mathrm{H}}(x)f(x) + f^{\mathrm{H}}(x)\dot{f}(x) \\ &= [F(x)f(x)]^{\mathrm{H}}f(x) + f^{\mathrm{H}}(x)F(x)f(x) \\ &= f^{\mathrm{H}}(x)[F^{\mathrm{H}}(x) + F(x)]f(x) \\ &= f^{\mathrm{H}}(x)\hat{F}(x)f(x)\end{aligned}$$

因为 $\hat{F}(x)$ 是负定的，所以 $\dot{V}(x)$ 也是负定的。则根据定理 4.1 可知，原点是渐近稳定的。如果随着 $\|x\| \to \infty$，$V(x) = f^{\mathrm{H}}(x)f(x) \to \infty$，平衡状态是大范围渐近稳定的。

注意，克拉索夫斯基定理与通常的线性方法不同，它不局限于稍稍偏离平衡状态。$V(x)$ 和 $\dot{V}(x)$ 以 $f(x)$ 或 $\dot{x}$ 的形式而不是以 x 的形式表示。

定理对于非线性系统给出了大范围渐近稳定性的充分条件。但非线性系统的平衡状态即使不满足上述定理所要求的条件，也可能是稳定的。因此，在应用克拉索夫斯基定理时，必须十分小心，以防止对给定的非线性系统平衡状态的稳定性分析做出错误的结论。

例 4.4 考虑具有两个非线性因素的二阶系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + f_2(x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2\end{aligned}$$

假设 $f_1(0) = f_2(0) = 0$，$f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 是实函数且可微。又假定当 $\|x\| \to \infty$ 时，$[f_1(x_1) + f_2(x_2)]^2 + (x_1 + ax_2)^2 \to \infty$。试确定使平衡状态 $x = 0$ 渐近稳定的条件。

解 在该系统中，$F(x)$ 为

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

其中

$$f_1'(x_1) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad f_2'(x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

于是 $\hat{F}(x)$ 为

$$\begin{aligned}\hat{F}(x) &= F^{\mathrm{H}}(x)+F(x)\\ &= \begin{bmatrix} 2f_1'(x_1) & 1+f_2'(x_2) \\ 1+f_2'(x_2) & 2a \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由克拉索夫斯基定理可知，如果 $\hat{F}(x)$ 是负定的，则所考虑系统的平衡状态 $x=0$ 是大范围渐近稳定的。因此，若

$$f_1'(x_1)<0\text{，对所有 } x_1\neq 0$$

$$4af_1'(x_1)-[1+f_2'(x_2)]^2>0\text{，对所有 } x_1\neq 0\text{，}\ x_2\neq 0$$

则平衡状态 $x_e=0$ 是大范围渐近稳定的。

这两个条件是渐近稳定性的充分条件。显然，由于稳定性条件完全与非线性函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的实际形式无关。

4.4　线性系统的 Lyapunov 稳定性分析

前已指出，Lyapunov 第二法不仅对非线性系统，而且对线性定常系统、线性时变系统，以及线性离散系统等均完全适用。

利用 Lyapunov 第二法对线性系统进行分析，有如下几个特点：

（1）都是充要条件，而非仅充分条件；

（2）渐近稳定性等价于 Lyapunov 方程的存在性；

（3）渐近稳定时，必存在二次型 Lyapunov 函数 $V(x)=x^{\mathrm{H}}Px$ 及 $\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{H}}Qx$；

（4）对于线性自治系统，当系统矩阵 A 非奇异时，仅有唯一平衡点，即原点 $x_e=0$；

（5）渐近稳定就是大范围渐近稳定，两者完全等价。

众所周知，对于线性定常系统，其渐近稳定性的判别方法很多。例如，对于连续时间定常系统 $\dot{x}=Ax$，渐近稳定的充要条件是：A 的所有特征值均有负实部，或者相应的特征方程 $|sI-A|=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$ 的根具有负实部。但为了避开困难的特征值计算，Routh-Hurwitz 稳定性判据通过判断特征多项式的系数来直接判定稳定性，Nyquist 稳定性判据根据开环频率特性来判断闭环系统的稳定性。本节将介绍的线性系统的 Lyapunov 稳定性方法，也是一种代数方法，也不要求把特征多项式进行因式分解，而且可进一步应用于求解某些最优控制问题。

4.4.1　线性定常系统的 Lyapunov 稳定性分析

考虑如下线性定常自治系统：

$$\dot{x}=Ax \tag{4.3}$$

其中 $x\in R^n$，$A\in R^{n\times n}$。假设 A 为非奇异矩阵，则有唯一的平衡状态 $x_e=0$，其平衡状态的稳定性很容易通过 Lyapunov 第二法进行研究。

对于（4.3）的系统，选取如下二次型 Lyapunov 函数，即

$$V(x)=x^{\mathrm{H}}Px$$

其中 P 为正定 Hermite 矩阵（如果 x 是实向量，且 A 是实矩阵，则 P 可取为正定的实对称矩阵）。

$V(x)$ 沿任一轨迹的时间导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\dot{x}^{\mathrm{H}}Px+x^{\mathrm{H}}P\dot{x}\\&=(Ax)^{\mathrm{H}}Px+x^{\mathrm{H}}PAx\\&=x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Px+x^{\mathrm{H}}PAx\\&=x^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}P+PA)x\end{aligned}$$

由于 $V(x)$ 取为正定，对于渐近稳定性，要求 $\dot{V}(x)$ 为负定的，因此必须有

$$\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{H}}Qx$$

其中

$$Q=-(A^{\mathrm{H}}P+PA)$$

为正定矩阵。因此，对于（4.3）的系统，其渐近稳定的充分条件是 Q 正定。

为了判断 $n\times n$ 维矩阵的正定性，可采用赛尔维斯特准则，即矩阵为正定的充要条件是矩阵的所有主子行列式均为正值。

在判别 $\dot{V}(x)$ 时，通常的方法不是先指定一个正定矩阵 P，然后检查 Q 是否也是正定的，而是先指定一个正定的矩阵 Q，然后检查由矩阵方程 $A^{\mathrm{H}}P+PA=-Q$ 确定的 P 是否也是正定的。这可归纳为如下定理。

定理 4.6 线性定常系统 $\dot{x}=Ax$ 在平衡点 $x_e=0$ 处渐近稳定的充要条件是：对于 $\forall Q>0$，$\exists P>0$，满足如下 Lyapunov 方程：

$$A^{\mathrm{H}}P+PA=-Q$$

其中 P、Q 均为 Hermite 矩阵或实对称矩阵。此时，Lyapunov 函数为

$$V(x)=x^{\mathrm{H}}Px,\quad \dot{V}(x)=-x^{\mathrm{H}}Qx$$

特别地，当 $\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{H}}Qx\neq 0$ 时，可取 $Q\geqslant 0$（正半定）。

对该定理作以下几点说明：

（1）如果系统只包含实状态向量 x 和实系统矩阵 A，则 Lyapunov 函数 $x^{\mathrm{H}}Px$ 为 $x^{\mathrm{T}}Px$，且 Lyapunov 方程为

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-Q$$

（2）如果 $\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{H}}Qx$ 沿任一条轨迹不恒等于零，则 Q 可取正半定矩阵。

（3）如果取任意的正定矩阵 Q，或者如果 $\dot{V}(x)$ 沿任一轨迹不恒等于零时取任意的正半定矩阵 Q，并求解矩阵方程

$$A^{\mathrm{H}}P+PA=-Q$$

以确定 P，则对于在平衡点 $x_e=0$ 处的渐近稳定性，P 为正定是充要条件。

注意，如果正半定矩阵 Q 满足下列秩的条件：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ \vdots \\ Q^{1/2}A^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

则 $\dot{V}(t)$ 沿任意轨迹不恒等于零。

（4）只要选择的矩阵 Q 为正定的（或根据情况选为正半定的），则最终的判定结果将与矩阵 Q 的不同选择无关。

（5）为了确定矩阵 P 的各元素，可使矩阵 $A^{\mathrm{H}}P+PA$ 和矩阵 $-Q$ 的各元素对应相等。为了确定矩阵 P 的各元素 $p_{ij}=\overline{p}_{ji}$，将导致 $n(n+1)/2$ 个线性方程。如果用 λ_1，λ_2，…，λ_n 表示矩阵 A 的特征值，则每个特征值的重数与特征方程根的重数是一致的，并且如果每两个根的和

$$\lambda_j+\lambda_k\neq 0$$

则 P 的元素将唯一地被确定。注意，如果矩阵 A 表示一个稳定系统，那么 $\lambda_j+\lambda_k$ 的和总不等于零。

（6）在确定是否存在一个正定的 Hermite 或实对称矩阵 P 时，为方便起见，通常取 $Q=I$（I 为单位矩阵）。从而，P 的各元素可按下式确定：

$$A^{\mathrm{H}}P+PA=-I$$

然后再检验 P 是否正定。

例 4.5　设二阶线性定常系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

显然，平衡状态是原点。试确定该系统的稳定性。

解　不妨取 Lyapunov 函数为

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$$

此时实对称矩阵 P 可由下式确定

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-I$$

上式可写为

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

将矩阵方程展开，可得联立方程组为

$$\begin{aligned} -2p_{12}&=-1 \\ p_{11}-p_{12}-p_{22}&=0 \\ 2p_{12}-2p_{22}&=-1 \end{aligned}$$

从方程组中解出 p_{11}、p_{12}、p_{22}，可得

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

为了检验 P 的正定性，来校核各主子行列式：

$$\frac{3}{2}>0,\qquad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}>0$$

显然，P 是正定的。因此，在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的，且 Lyapunov 函数为

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Px=\frac{1}{2}(3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2)$$

且

$$\dot{V}(x)=-(x_1^2+x_2^2)$$

例 4.6 试确定如图 5.3 所示系统的增益 K 的稳定范围。

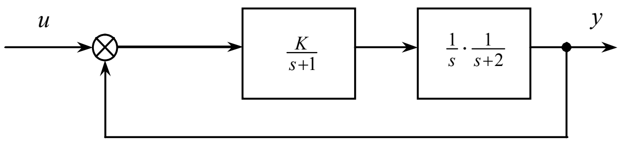


图 4.3 控制系统

解 容易推得闭环系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}u$$

在确定 K 的稳定范围时，假设输入 u 为零。于是上式可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-2x_2+x_3 \\ \dot{x}_3=-Kx_1-x_3 \end{cases} \tag{4.4}$$

显然 K 不等于零时，原点为唯一的平衡点。假设取正半定的实对称矩阵 Q 为

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于除原点外 $\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{T}}Qx$ 不恒等于零，因此可选上式的 Q。为了证实这一点，注意

$$\dot{V}(x)=-x^{\mathrm{T}}Qx=-x_3^2$$

取 $\dot{V}(x)$ 恒等于零，意味着 x_3 也恒等于零。如果 x_3 恒等于零，由式（4.4）可得 $0=-Kx_1=0$，即 x_1 也必恒等于零。

如果 x_1 恒等于零，由式（4.4）可得 $0=x_2$，即 x_2 也恒等于零。

于是 $\dot{V}(x)$ 只在原点处才恒等于零。因此，为了分析稳定性，先检验矩阵 Q 是否满秩。可检验下列矩阵的秩：

$$\begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ Q^{1/2}A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{bmatrix}$$

显然，对于 $K \neq 0$，其秩为 3。因此可选择这样的 Q 用于 Lyapunov 方程。

现在求解如下 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$$

它可重写为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对 P 的各元素求解，可得

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{K^2+12K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} & 0 \\ \dfrac{6K}{12-2K} & \dfrac{3K}{12-2K} & \dfrac{K}{12-2K} \\ 0 & \dfrac{K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} \end{bmatrix}$$

为使 P 成为正定矩阵，其充要条件为

$$12-2K > 0 \text{ 和 } K > 0$$

或

$$0 < K < 6$$

因此，当 $0 < K < 6$ 时，系统在 Lyapunov 意义下是稳定的，也就是说，原点是大范围渐近稳定的。

对于线性定常系统，还可以用下面的定理来分析稳定裕度。

定理 4.7 若对任意给定的正定对称矩阵 Q，存在正定对称矩阵 P，满足矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - 2\sigma P = -Q$$

则系统特征值均满足

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < \sigma, \quad i = 1, 2 \cdots$$

其中 σ 为给定负实数，反之亦然。

证明 若有

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - 2\sigma P = -Q$$

则

$$(A-\sigma I)^{\mathrm{T}}P+P(A-\sigma I)=-Q$$

即系统平移变换$(A-\sigma I)$之后，还是大范围渐近稳定的，因此$\mathrm{Re}(\lambda_i)<\sigma$， $i=1,2\cdots$。

4.4.2 线性定常离散系统稳定性分析

定理 4.8 线性定常离散系统的状态方程为

$$X(k+1)=GX(k)$$
$$X_e=0$$

系统在平衡点$X_e=0$是大范围内渐近稳定的充分必要条件是：对于任意给定的对称正定矩阵Q都存在对称正定矩阵P，使得

$$G^{\mathrm{T}}PG-P=-Q$$

当取$Q=I$时有

$$G^{\mathrm{T}}PG-P=-I$$

系统的李亚普诺夫函数即为

$$V(X(k))=X^{\mathrm{T}}(k)PX(k)$$

例 4.7 设离散时间系统的状态方程为

$$X(k+1)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}X(k)$$

试确定系统在平衡点处是大范围内渐近稳定的条件。

解 根据定理，条件为($Q=I$)，

$$G^{\mathrm{T}}PG-P=-I$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}p_{11}(1-\lambda_1^2) & p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2)\\ p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2) & p_{22}(1-\lambda_2^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}p_{11}(1-\lambda_1^2)=1\\ p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2)=0\\ p_{22}(1-\lambda_2^2)=1\end{cases}$$

根据塞尔维斯特准则，P为正定则要求

$$P_{11}>0,\ \ P_{11}P_{22}-P_{12}{}^2>0$$

即

$$-1<\lambda_1<1,\ \ -1<\lambda_2<1$$

即只有传递函数的极点位于单位圆内，离散系统在平衡点处才是大范围内渐近稳定的。

4.4.3 线性时变系统的稳定性分析

定理 4.9 若系统$\dot{X}=A(t)X(t)$的矩阵A是t的函数(即时变函数)，则系统在平衡点$X_e=0$

处是大范围渐近稳定的充要条件为：

对于任意给定的连续对称正定矩阵 $Q(t)$，存在一个连续对称正定矩阵 $P(t)$，满足

$$\dot{P}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - P(t)A(t) - Q(t)$$

系统的李亚普诺夫函数即为

$$V(X,t) = X^{\mathrm{T}}(t)P(t)X(t)$$

证明 取系统的李亚普诺夫函数为

$$V(X,t) = X^{\mathrm{T}}(t)P(t)X(t)$$

$P(t)$为对称正定矩阵，因此

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{X}^{\mathrm{T}}(t)P(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)P(t)\dot{X}(t)\\ &= X^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)P(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)P(t)A(t)X(t)\\ &= X^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P(t) + \dot{P}(t) + P(t)A(t)]X(t)\\ &= -X^{\mathrm{T}}(t)Q(t)X(t)\end{aligned}$$

其中

$$Q(t) = -A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - \dot{P}(t) - P(t)A(t) \tag{4.5}$$

根据定理 4.1，因为 P 是正定对称矩阵（V 正定），所以若 Q 也是正定对称矩阵，则 $\dot{V}(X,t)$ 是负定的，系统是渐近稳定的。

证毕。

由式（4.5）可求解 P 为

$$P(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(t_0,t)P(t_0)\Phi(t_0,t) - \int_{t_0}^{t}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t)Q(\tau)\Phi(\tau,t)\mathrm{d}\tau$$

其中 $\Phi(\tau,t)$ 是系统 $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ 的状态转移矩阵， $P(t_0)$ 是式（4.5）的初始条件。

因此一般取 $Q(t) = Q = I$ ，由上式根据状态转移矩阵求解 $P(t)$，再根据 $P(t)$是否具有连续、对称和正定性来分析线性时变系统的稳定性。

4.5 基于 Lyapunov 稳定性理论的模型参考控制系统设计

Lyapunov 稳定性理论除了用于分析系统稳定性，在其他方面的应用也越来越广泛。比如确定系统的校正方案、计算响应误差面积的平方值、估计系统动态响应的快速性等。基于 Lyapunov 稳定性理论进行控制系统的设计也是重要的一种，本节讨论一下基于 Lyapunov 稳定性理论的模型参考控制系统设计。

一种确定系统性能的有效方法是设定一个参考模型，对于给定的输入参考模型能产生所希望的输出。参考模型不必是实际的硬件设备，可以是在计算机上模拟的数学模型。在模型参考控制系统中，将参考模型的输出和对象的输出进行比较，差值用来产生控制信号。其结构如图 4.4 所示。

假设对象的状态方程为

$$\dot{x} = f^{\mathrm{H}}(x,u,t) \tag{4.6}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^r$ ，且 $f(\cdot)$ 为 n 维向量函数。

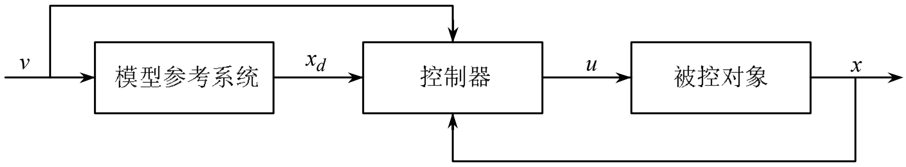


图 4.4 模型参考控制系统

希望控制系统紧随某一模型系统。设计的关键是综合出一个控制器，使得控制器总是产生一个信号，迫使对象的状态接近于模型的状态，系统结构如图 4.4 所示。

假设模型参考系统是线性的，并由下式确定：

$$\dot{x}_d = Ax_d + Bv \tag{4.7}$$

其中 $x_d \in R^n$，$v \in R^r$，$A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times r}$。

又假设 A 的所有特征值都有负实部，则该模型参考系统具有一个渐近稳定的平衡状态。

令误差向量为

$$e = x_d - x \tag{4.8}$$

在该问题中，希望通过一个合适的控制向量 u，使得误差向量减小到零。由式（4.6）和（4.8）可得

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x}_d - \dot{x} = Ax_d + Bv - f(x,u,t) \\ &= Ae + Ax - f(x,u,t) + Bv \end{aligned} \tag{4.9}$$

式（4.9）就是误差向量的微分方程。

现在设计一个控制器，使得在稳态时，$x = x_d$ 和 $\dot{x} = \dot{x}_d$ 或 $e = \dot{e} = 0$。因此，原点 $e = 0$ 是一个平衡状态。

在综合控制向量 u 时，一个方便的出发点就是对式（4.9）给出的系统构造一个 Lyapunov 函数。假设 Lyapunov 函数的形式为

$$V(e) = e^{\mathrm{H}} Pe$$

其中的 P 是正定的 Hermite 或实对称矩阵。求 $V(e)$ 对时间的导数，可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^{\mathrm{H}} Pe + e^{\mathrm{H}} P\dot{e} \\ &= [e^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}} + x^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}} - f^{\mathrm{H}}(x,u,t) + v^{\mathrm{H}} B^{\mathrm{H}}]Pe \\ &= e^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}} P + PA)e + 2M \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $M = e^{\mathrm{H}} P[Ax - f(x,u,t) + Bv]$ 为纯量。

如果

（1）$A^{\mathrm{H}} P + PA$ 是一个负定矩阵；

（2）控制向量 u 可以使纯量 M 为非正值。

注意到当 $\|e\| \to \infty$，有 $V(e) \to \infty$，平衡状态 e=0 是大范围渐近稳定的。条件（1）总可通过选择适当的 P 而得到满足，因为 A 的所有特征值均假设具有负实部。因此，问题就归结为选择一个合适的控制向量 u，使得 M 等于零或为负值。

下面通过一个例子来说明如何使用这种方法来设计非线性控制器。

例 4.8 考虑由下式描述的非线性时变系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其中 $a(t)$ 是时变参数，b 为正常数。设参考模型的方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} v \tag{4.11}$$

试设计一个非线性控制器，使得系统能够稳定地工作。

解 定义误差向量为

$$e = x_d - x$$

Lyapunov 函数为

$$V(e) = e^{\mathrm{H}} Pe$$

其中 P 是正定实对称矩阵。参照式（4.10）可得 $\dot{V}(e)$ 为

$$\dot{V}(e) = e^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}P + PA)e + 2M$$

其中

$$M = e^{\mathrm{H}}P[Ax - f(x,u,t) + Bv]$$

由式（4.11）确定矩阵 A 和 B，并选择矩阵 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} > 0$$

可得

$$\dot{V}(e) = -(q_{11}e_1^2 + q_{22}e_2^2) + 2M$$

其中

$$\begin{aligned} M &= [e_1 \quad e_2] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a(t)x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 v \end{bmatrix} \right\} \\ &= (e_1p_{12} + e_2p_{22})[-(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + a(t)x_2^2 + \omega_n^2 v - u] \end{aligned}$$

如果选取 u 使得

$$u = -(\omega_n^2 - b)x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + \omega_n^2 v + a_m x_2^2 \mathrm{sign}(e_1p_{12} + e_2p_{22}) \tag{4.12}$$

其中

$$a_m = \max|a(t)|$$

则

$$M = (e_1p_{12} + e_2p_{22})[a(t) - a_m \mathrm{sign}(e_1p_{12} + e_2p_{22})]x_2^2 \leqslant 0$$

采用由方程（4.12）给出的控制函数 u 时，平衡状态 $e = 0$ 就是大范围渐近稳定的。因此，方程（4.12）确定了一个非线性控制律，它将保证系统渐近稳定地工作。

请注意，瞬态响应收敛的速度取决于矩阵 P，而矩阵 P 则取决于设计开始阶段所取的矩阵 Q。

习题

4.1 试确定下列二次型是否为正定的。

$$Q = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3$$

4.2　试确定下列二次型是否为负定的。

$$Q = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$$

4.3　试确定下列非线性系统的原点稳定性并考虑二次型函数 $V = x_1^2 + x_2^2$ 是否可以作为一个可能的 Lyapunov 函数。

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 == x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

4.4　试写出下列系统的几个 Lyapunov 函数并确定该系统原点的稳定性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.5　试确定下列线性系统平衡状态的稳定性

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + 2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - 1$$

4.6　线性离散系统为

$$X(k+1) = GX(k)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & K/2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K > 0$$

试求系统在原点渐近稳定时 K 值的范围。

4.7　设系统运动方程式为

$$\ddot{y} + (1 - |y|)\dot{y} + y = 0$$

试确定其渐近稳定的条件。

4.8　设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

试作其 V 函数，并在 $a>0$，$a<0$ 和 $a=0$ 时，分析平衡点处的系统稳定性。

4.9　已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

试用克拉索夫斯基方法分析其稳定性。