



第 4 章

计算机控制系统分析

计算机控制系统分析就是对给定的控制系统数学模型，分别从系统的稳定性、准确性、快速性三个方面进行分析。计算机控制系统的分析方法和连续系统的分析方法基本相似，可以从描述系统离散特性的差分方程或脉冲传递函数出发，应用 z 变换和 z 反变换，求得离散系统输出值的采样值。本章将分别讨论系统的稳定性条件、稳定性判据、动态响应过程、稳态误差和系统的根轨迹等问题。

4.1 计算机控制系统的稳定性分析

4.1.1 线性离散控制系统的稳定性条件

稳定是控制系统正常工作的前提，无论对于连续系统还是离散系统，稳定是指在有界输入作用下，系统的输出也是有界的。对于一个线性定常系统，如果它是稳定的，那么对应的微分方程的解必须是收敛的和有界的。对于连续系统，其稳定性主要是由系统闭环传递函数的极点在 s 平面的位置决定的；如果所有极点都分布在 s 平面的左半部，则该系统稳定；如果有极点出现在 s 平面右半部，则系统不稳定。 s 平面的虚轴是连续系统稳定与不稳定的分界线。对于离散系统，同样也可以由离散闭环系统的特征值在 z 平面的分布决定该系统的稳定性，但其变量为 z ，而 z 与 s 之间具有指数关系，即 $z=e^{Ts}$ ，如果将 s 平面按这个指数关系映射到 z 平面，找出 s 平面的虚轴及稳定区域（ s 左半平面）在 z 平面的映像，那么就能够获得离散系统稳定的充要条件。

1. s 域到 z 域的映射

令 $s = \sigma + j\omega$ ，则有

$$z = e^{Ts} = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} \cdot e^{jT\omega} \quad (4.1)$$

于是， s 域到 z 域的基本映射关系式为

$$|z| = e^{T\sigma} \quad \theta = T\omega \quad (4.2)$$

由式 (4.2) 可知， s 平面的坐标原点映射到 z 平面上为 $(1, j0)$ 的点； s 平面的虚轴映射到 z 平面上是以原点为圆心的单位圆周，其中对于 ω 等于 $-\omega_s/2$ 到 $\omega_s/2$ 一段，映射到 z 平面上是第一个单位圆周，其后每当 ω 增加（或减小）一个 ω_s ，映射到 z 平面上就是与第一个圆周完全重叠的单位圆周，因此 s 平面的虚轴映射到 z 平面上无穷多个相重叠的单位圆周； s 平面的左半平面映射到 z 平面上单位圆的内部区域； s 平面的右半平面映射到 z 平面上单位圆的外部区域，如图 4-1 所示。

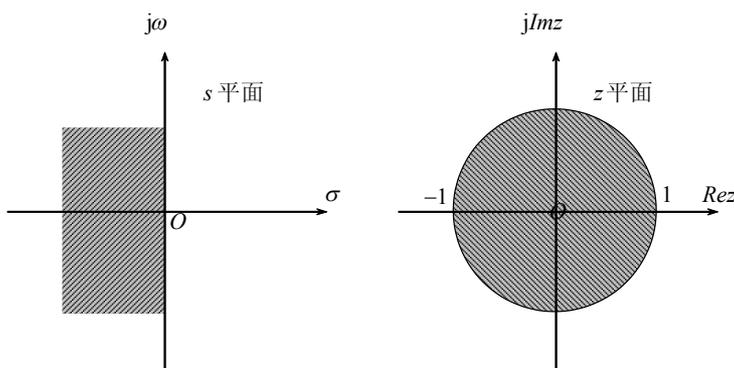


图 4-1 s 平面与 z 平面的映射关系

下面研究几种 s 平面上有用的轨迹变换到 z 平面的情况。

(1) s 平面的等衰减线。 s 平面的等衰减线是 σ 为常值的垂直线，变换到 z 平面是半径为 $e^{\sigma T}$ 的圆，左半平面的垂直线对应于 z 平面半径小于 1 的圆； s 右半平面的垂直线对应于 z 平面半径大于 1 的圆，如图 4-2 所示。

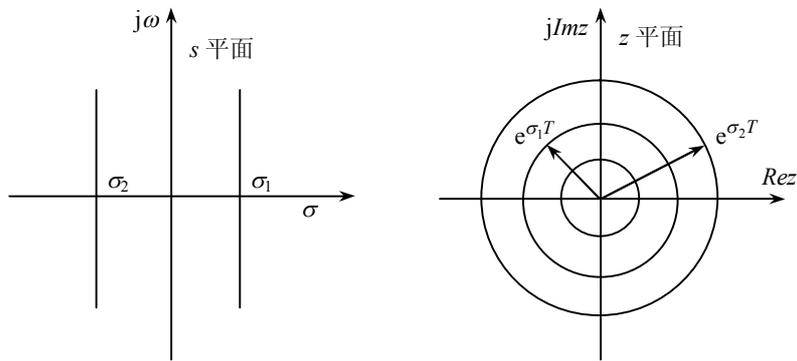


图 4-2 s 平面的等衰减线到 z 平面的映射

(2) s 平面的等频率线。 s 平面 ω 为常值的直线对应于 z 平面过原点的射线，射线同横坐标的夹角为 ωT ，如图 4-3 所示。

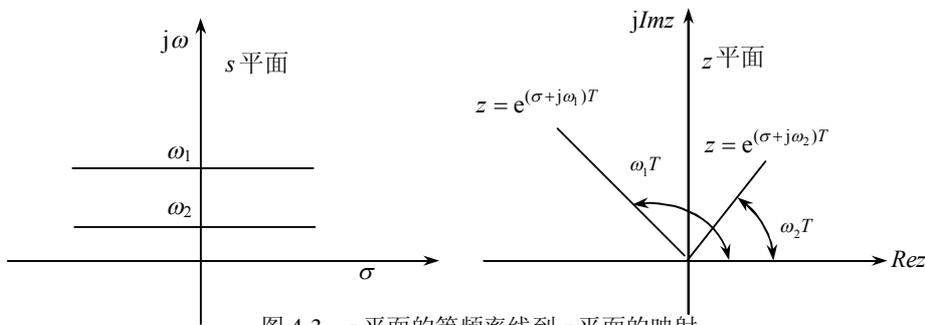


图 4-3 s 平面的等频率线到 z 平面的映射

(3) s 平面的等阻尼比线。
 s 平面的等 ξ (阻尼) 线对应于 z 平面的螺旋线，如图 4-4 所示。

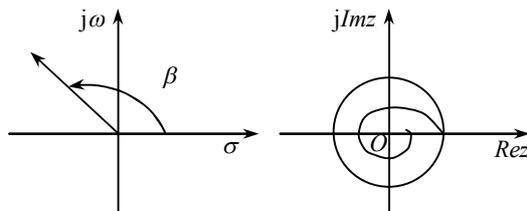


图 4-4 s 平面的等阻尼比线到 z 平面的映射

2. 线性离散控制系统稳定的充要条件

考虑如图 4-5 所示的线性离散控制系统，其闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \tag{4.3}$$

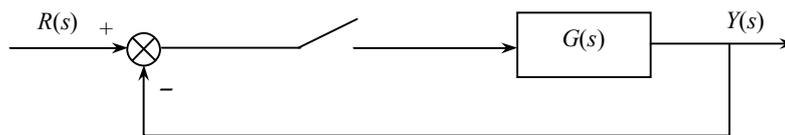


图 4-5 线性离散控制系统

系统对应的特征方程为

$$1 + G(z) = 0 \quad (4.4)$$

由式(4.4)可以看出闭环系统特征方程的根 z_1, z_2, \dots, z_n 就是闭环脉冲传递函数的极点。

根据 s 平面和 z 平面极点的对应关系, 可得线性离散控制系统稳定的充要条件是: 闭环脉冲传递函数的极点均位于 z 平面的单位圆内, 即闭环系统特征方程的所有根的模满足 $|z_i| < 1 \quad i=1, \dots, n$ 。

如果闭环传递函数有极点在 z 平面单位圆外, 则系统不稳定, 所以 z 平面单位圆是离散系统稳定与不稳定的分界线。

与连续系统稳定性的分析一样, 用直接求解特征方程根的方法来判别高阶离散系统的稳定性是不方便的。因此下面介绍几种常用的判据, 这些判据通过间接方法来判断系统的稳定性。

4.1.2 线性离散系统的稳定性判据

1. 朱利判据

朱利判据是对给定的特征方程 $D(z) = 0$ 的系数建立朱利表, 由朱利表的系数可以直接判断离散系统的稳定性。

设特征方程 $D(z)$ 是 z 的下列多项式:

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (4.5)$$

表 4-1 列出了朱利表的一般形式。

表 4-1 朱利稳定性表的一般形式

行	z^0	z^1	z^2	...	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	c_0		
...		
$2n-5$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-4$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n-3$	q_0	q_1	q_2				

第一行元素由 $D(z)$ 按 z 的升幂排列的系数组成。第二行元素由 $D(z)$ 按 z 的降幂排列的系数组成。第三行至第 $2n-3$ 行元素则按下式确定:

$$\begin{cases} b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\ \dots \\ q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{3-k} \\ p_3 & p_k \end{vmatrix} & k = 0, 1, 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

在阵列中, 第 $2k+2$ 行的元素由第 $2k+1$ 行的元素按逆顺序排列而组成。

朱利判据: 如果满足下列全部条件, 则由特征方程 $D(z) = 0$ 表征的系统是稳定的。

- (1) $|a_0| < |a_n|$
- (2) $D(z)|_{z=1} > 0$
- (3) $(-1)^n D(z)|_{z=-1} > 0$
- (4) $|b_{n-1}| < |b_0|$
- (4) $|c_{n-2}| < |c_0|$
- ...
- $|q_2| < |q_0|$

朱利判据准则是离散系统特征根(极点)位于单位圆内 ($|z| < 1$) 的充分必要条件。

对于常见的低阶系统, 下面列出了根据朱利判据得到的稳定条件, 这些条件用特征方程的系数表示。

- (1) 一阶系统 ($n=1$)。

$$D(z) = a_1 z + a_0 = 0 \quad a_1 > 0$$

稳定条件:

$$|a_0| < a_1 \quad (4.7)$$

- (2) 二阶系统 ($n=2$)。

$$D(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad a_2 > 0$$

稳定条件:

$$D(1) = a_2 + a_1 + a_0 > 0$$

$$(-1)^2 D(-1) = a_2 - a_1 + a_0 > 0$$

$$|a_0| < a_2 \quad (4.8)$$

例 4-1 一离散系统的闭环特征方程为 $D(z) = z^2 + (k_p t + k_i t - 2)z + 1 - k_p t = 0$, 其中 t 为大于零的常数, 利用朱利判据试求使系统稳定的 k_p 与 k_i 的取值范围。

解: 系统的特征方程为

$$D(z) = z^2 + (k_p t + k_i t - 2)z + 1 - k_p t = 0$$

与 $D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ 相比较, 则

$$a_2 = 1 > 0, \quad a_1 = k_p t + k_i t - 2, \quad a_0 = 1 - k_p t$$

由二阶系统朱利判据条件, 则

$$(1) \quad a_2 > |a_0|, \quad \text{即} \quad 1 > |1 - k_p t|。$$

$$(2) \quad D(z)|_{z=-1} > 0, \quad \text{即} \quad D(-1) = 1 - (k_p t + k_i t - 2) + 1 - k_p t > 0。$$

$$(3) \quad D(z)|_{z=1} > 0, \quad \text{即} \quad D(1) = 1 + (k_p t + k_i t - 2) + 1 - k_p t > 0。$$

解 (1)、(2)、(3) 联立不等式组, 则:

$$0 < k_p < \frac{4 - k_i t}{2t}$$

$$k_i > 0$$

即 k_p 与 k_i 满足上述不等式组时, 系统才是稳定系统。

例 4-2 一离散系统如图 4-6 所示, 试讨论该系统的稳定性, 其中 $T=1s$ 。

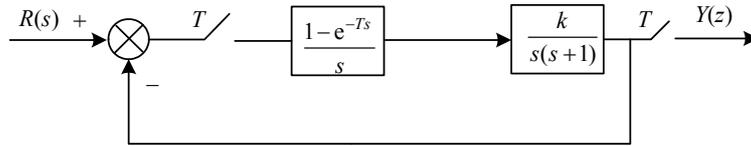


图 4-6 例 4-2 系统结构图

解：系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = Z[H_0(s)G_p(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}G_p(s)\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{k}{s^2(s+1)}\right]$$

$$= \frac{0.368kz + 0.264k}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{0.368kz + 0.264k}{z^2 + (0.368k - 1.368)z + 0.368 + 0.264k}$$

系统特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.368k - 1.368)z + (0.264k + 0.368) = 0$$

利用二阶系统朱利判据条件，有

$$(1) a_2 > |a_0|, \text{ 即 } |0.264k + 0.368| < 1。$$

$$(2) D(z)_{z=-1} > 0, \text{ 即 } D(-1) = 1 - (0.368k - 1.368) + (0.264k + 0.368) > 0。$$

$$(3) D(z)_{z=1} > 0, \text{ 即 } D(1) = 1 + (0.368k - 1.368) + (0.264k + 0.368) > 0。$$

第一个式子可解 $k < 2.39$ ，第二个式子可解 $k > 0$ ，第三个式子可解 $k < 26.2$ ，即满足系统稳定的 k 值范围为 $0 < k < 2.39$ 。

2. 修正劳斯判据

在连续系统中，如果特征方程的根都在 s 平面的左半部，则系统是稳定的，这可以用劳斯判据来判断；然而在离散系统中，系统的稳定性要求系统特征方程的根全部在 z 平面的单位圆内。因此，离散系统不能直接应用连续系统的劳斯判据来分析其稳定性，而必须引入 w 变换。采用这种变换方法，可以将 z 平面单位圆内区域映射为 w 平面的左半部，同时又能保证变换后的特征方程为一般方程，这样就可以应用劳斯判据来判断离散系统的稳定性。

w 变换定义如下：

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \quad (4.9)$$

式中， T 为采样周期。解出：

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (4.10)$$

设复变量 z 和 w 分别为

$$z = x + jy, \quad w = u + jv$$

则可得

$$w = u + jv = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{x + jy - 1}{x + jy + 1} = \frac{2}{T} \left[\frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x+1)^2 + y^2} + j \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} \right] \quad (4.11)$$

因此有

$$\begin{cases} u = \frac{2(x^2 + y^2) - 1}{T(x+1)^2 + y^2} \\ v = \frac{2y}{T(x+1)^2 + y^2} \end{cases} \quad (4.12)$$

根据式(4.12)可得如下关系:

当 $|z| = x^2 + y^2 = 1$ 时, $u = 0$, $w = jv$ 。

当 $|z| = x^2 + y^2 < 1$ 时, $u < 0$, $w = u + jv$ 。

当 $|z| = x^2 + y^2 > 1$ 时, $u > 0$, $w = u + jv$ 。

由此可见, w 变换把 z 平面上的单位圆映射为 w 平面上的虚轴; 把 z 平面上的单位圆内区域映射为 w 平面上的左半部; 把 z 平面上的单位圆外区域映射为 w 平面上的右半部。

z 平面和 w 平面的映射关系如图 4-7 所示。

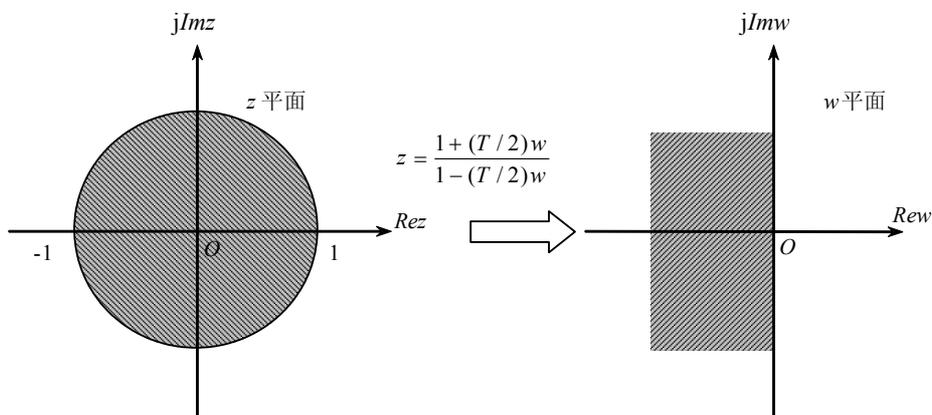


图 4-7 z 平面与 w 平面映射关系

此时

$$\begin{aligned} w &= \frac{2z-1}{Tz+1} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2e^{j\omega T}-1}{T e^{j\omega T}+1} = \frac{2e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{T e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}} \\ &= j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} = j\omega_w \end{aligned} \quad (4.13)$$

$j\omega_w$ 为 w 平面的虚轴, 则它对应 z 平面的单位圆, ω_w 为 w 平面的频率, 且由上式可知

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

其中 ω 为 s 平面的频率。

当 ωT 较小时, 有

$$\omega_w = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega \quad (4.14)$$

即 w 平面的频率近似于 s 平面的频率。

通过 z - w 变换, 就可以应用劳斯判据分析线性离散系统的稳定性了。

离散系统劳斯判据的应用步骤简单归纳如下:

- (1) 建立离散系统 z 平面的特征方程 $D(z) = 0$ 。
- (2) 对特征方程 $D(z) = 0$ 作 w 变换。
- (3) 对于特征方程 $a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ 建立劳斯列表:

$$\begin{array}{l|l} w^n & a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad \dots \quad a_0 \\ w^{n-1} & a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \dots \quad a_1 \\ w^{n-2} & b_{n-1} \quad b_{n-3} \quad b_{n-5} \quad \dots \\ w^{n-3} & c_{n-1} \quad c_{n-3} \quad c_{n-5} \quad \dots \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ w^0 & h_{n-1} \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \quad c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

...

- (4) 若劳斯列表第一列各元素符号一致, 则所有特征根均分布在左半平面, 系统稳定。
- (5) 劳斯列表第一列各元素符号变化的次数等于系统右半平面上特征根的个数。

例 4-3 应用劳斯判据, 讨论例 4-2 所示系统的稳定性, 其中 $k=1$, $T=1\text{s}$ 。

解: 系统开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[H_0(s)G_p(s)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}G_p(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} \end{aligned}$$

闭环脉冲传递函数为
$$\Phi(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

系统特征方程为
$$z^2 - z + 0.632 = 0$$

采用 w 变换, 即 $z = \frac{1+0.5w}{1-0.5w}$, 则可得 w 平面的特征方程为

$$0.658w^2 + 0.368w + 0.632 = 0$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{l|l} w^2 & 0.658 \quad 0.632 \\ w^1 & 0.368 \\ w^0 & 0.632 \end{array}$$

由劳斯判据可知系统稳定。

例 4-4 在例 4-1 中, 设 $T=0.1\text{s}$, 求使系统稳定的 k 的变化范围, 并求 s 平面和 w 平面的临界频率。

解: 系统开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[H_0(s)G_p(s)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}G_p(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{k}{s^2(s+1)}\right] \\ &= \frac{0.00484kz + 0.00468k}{(z-1)(z-0.905)} \end{aligned}$$

采用 w 变换

$$G(w) = G(z) \Big|_{z=\frac{1+0.5w}{1-0.5w}} = \frac{K(0.00484z + 0.00468)}{(z-1)(z-0.905)} \Big|_{z=\frac{1+0.5w}{1-0.5w}}$$

$$= \frac{-0.00016kw^2 - 0.1872kw + 3.81k}{3.81w^2 + 3.80w}$$

此时系统的特征方程为

$$(3.81 - 0.00016k)w^2 + (3.80 - 0.1872k)w + 3.81k = 0$$

劳斯表为

w^2	(3.81-0.00016k)	3.81k	→	$k < 23812.5$
w^1	3.80-0.1872k		→	$k < 20.3$
w^0	3.81k		→	$k > 0$

故 k 的变化范围为 $0 < k < 20.3$ 。

当 $k=20.3$ 时, 系统临界稳定, 此时特征方程的解为

$$w = \pm j4.508$$

故 w 平面的临界频率为

$$\omega_w = 4.508 \text{ rad/s}$$

s 平面的临界频率为

$$\omega = \frac{2}{T} \tan^{-1} \frac{\omega_w T}{2} = 4.43 \text{ rad/s}$$

3. 修尔-科恩判据

该判据提供了一种用解析法判断离散系统稳定性的途径。设离散控制系统的特征方程为

$$1 + G(z) = 0 \quad (4.15)$$

其中 $G(z)$ 一般为两个多项式之比。用 $W(z)$ 表示特征方程的分子, 即:

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (4.16)$$

把系数 a_0, a_1, \dots, a_n 写成如下所示的行列式形式:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{k-2} \\ \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \cdots & \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

式中, \bar{a}_n 是 a_n 的共轭值, $\Delta_k (k=1, 2, 3, \dots)$ 是一个 $2k \times 2k$ 的行列式。修尔-科恩判据指出, 如果特征方程的根都在单位圆内, 即系统稳定, 就必须满足下面的条件:

$$\begin{cases} \Delta_k < 0 & \text{如果 } k \text{ 是奇数} \\ \Delta_k > 0 & \text{如果 } k \text{ 是偶数} \end{cases}$$

下面列出了 k 分别取 1, 2, 3 时, Δ_k 的表达式:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ \bar{a}_n & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 \\ \bar{a}_{n-2} & \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

例 4-5 试采用修尔-科恩稳定判据判别下列数字系统的稳定性:

$$G(z) = \frac{z}{(2.45z+1)(2.45z-1)}$$

解: 特征方程为

$$1+G(z)=0$$

即

$$w(z) = (2.45z)^2 - 1 + z = 6z^2 + z - 1 = 0$$

特征方程的阶 $n=2$, 因此需要计算两个行列式 Δ_1 和 Δ_2 来确定稳定性, 由式 (4.17) 可得

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -35$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1225$$

因为 $\Delta_1 < 0$ 和 $\Delta_2 > 0$, 所以系统是稳定的。

如果 $w(z)$ 是实系数的二次多项式, 且 z^2 系数为 1, 则修尔-科恩判据可以简化, 特征方程 $1+G(z)=0$ 的根全部在 z 平面单位圆内部的充要条件为:

$$\begin{aligned} |w(0)| &< 1 \\ w(1) &> 0 \\ w(-1) &> 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.2 计算机控制系统的动态过程

4.2.1 计算机控制系统的动态响应过程

所有的控制系统除了要求系统具有稳定性和满意的静态特性外, 还要求系统具有满意的快速性和满意的动态品质, 即系统的动态特性(暂态响应)满足要求。为研究系统的动态响应特性, 通常在系统输入端加入单位阶跃信号, 通过研究系统的输出响应来得到系统的过渡特性。如果已知线性离散系统在阶跃输入下输出的 z 变换 $Y(z)$, 那么对 $Y(z)$ 进行 z 反变换, 就可获得在采样时刻的输出值 $y(kT)$ 。将 $y(kT)$ 连成光滑曲线, 就可得到系统的动态性能指标(即超调量 $\sigma\%$ 与过渡过程时间

t_s), 如图 4-8 所示。

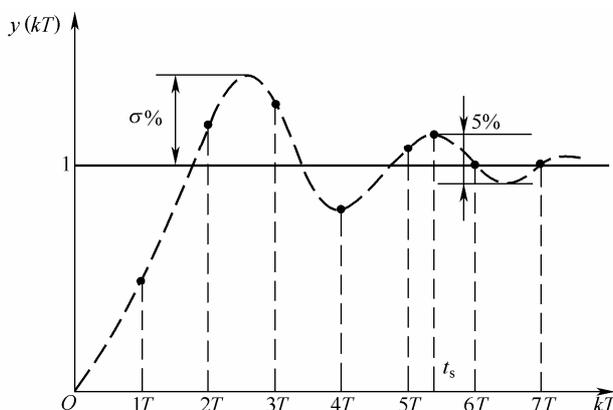


图 4-8 性离散系统的单位阶跃响应

一般, 采样系统的闭环脉冲传递函数可以写成如下形式

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \quad (m < n) \quad (4.19)$$

式中 z_i 与 p_j 分别表示闭环零点和极点。

当单位阶跃信号输入时, 系统的输出为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \cdot \frac{z}{z-1} \quad (4.20)$$

对上式取 z 反变换, 得采样系统的输出响应 $y(kT)$, 其中包含稳态响应, 以及由实极点和复极点所引起的暂态响应。

下面分别讨论实极点和复极点对系统动态性能的影响。

1. 闭环实极点对系统动态性能的影响

若系统具有 n 个互异的单实根 p_i ($i=1, 2, \dots, n$), 则 $Y(z)$ 可以展开为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{z}{z - p_i}$$

相应的输出序列为

$$y(k) = \sum_{i=1}^n A_i (p_i)^k \quad k \geq 0 \quad (4.21)$$

由式 (4.21) 可以看出, 系统的每一个实极点对应一个暂态响应分量。由于实极点的位置不同, 因而对系统动态性能的影响也不同, 如图 4-9 所示。

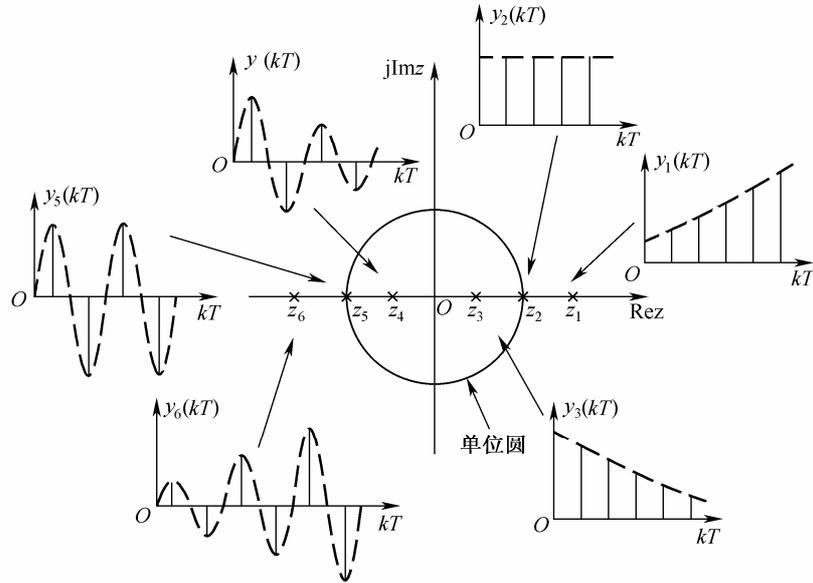


图 4-9 实极点位置和动态响应之间的关系

由图 4-9 可以看出:

- (1) 如果 $p_1 > 1$, 对应的暂态响应分量 $y_1(kT)$ 单调发散。
- (2) 如果 $p_2 = 1$, 它对应的暂态响应 $y_2(kT)$ 是等幅的。
- (3) 如果 $0 < p_3 < 1$, 它对应的暂态响应 $y_3(kT)$ 单调衰减。
- (4) 如果 $-1 < p_4 < 0$, 它对应的暂态响应 $y_4(kT)$ 是正负交替的衰减振荡 (周期为 $2T$)。
- (5) 如果 $p_5 = -1$, 它对应的暂态响应 $y_5(kT)$ 是正负交替的等幅振荡 (周期为 $2T$)。
- (6) 如果 $p_6 < -1$, 它对应的暂态响应 $y_6(kT)$ 是正负交替的发散振荡 (周期为 $2T$)。

2. 闭环复数极点对系统动态性能的影响

若系统只具有一对共轭复数极点 p_i, p_{i+1} , 则

$$p_i, p_{i+1} = |p_i| e^{\pm j\theta_i}$$

该共轭复数极点对引起的输出响应序列为

$$y_{i,i+1}(k) = Z^{-1} \left[\frac{A_i z}{z - p_i} + \frac{A_{i+1} z}{z - p_{i+1}} \right] = A_i (p_i)^k + A_{i+1} (p_{i+1})^k \quad k \geq 0 \quad (4.22)$$

由于特征方程是实系数, 故 A_i, A_{i+1} 必定是共轭的。

设 $A_i, A_{i+1} = |A_i| e^{\pm j\varphi_i}$, 代入式 (4.22) 有

$$\begin{aligned} y_{i,i+1}(k) &= |A_i| |p_i|^k e^{j(k\theta_i + \varphi_i)} + |A_i| |p_i|^k e^{-j(k\theta_i + \varphi_i)} \\ &= 2 |A_i| |p_i|^k \cos(k\theta_i + \varphi_i) \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

根据式 (4.23) 可以看出:

- (1) 复极点在 z 平面单位圆外, 对应的暂态响应是振荡发散的。
- (2) 复极点在 z 平面单位圆上, 对应的暂态响应是等幅振荡。
- (3) 复极点在 z 平面单位圆内, 对应的暂态响应是振荡衰减的。

复数极点引起的输出响应如图 4-10 所示。

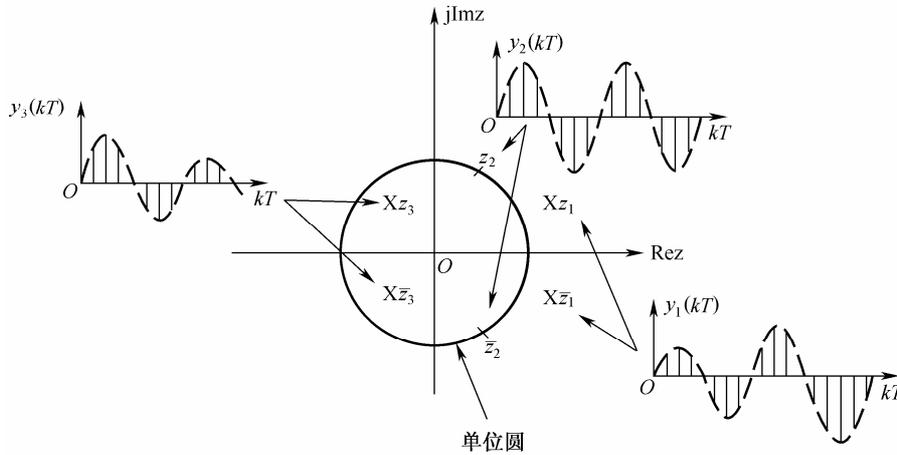


图 4-10 复极点位置和动态响应之间的关系

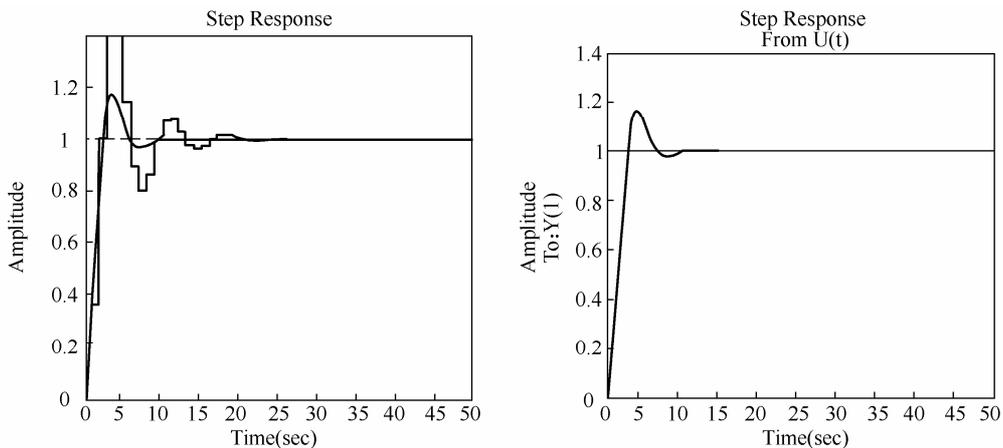
例 4-6 求例 4-2 的阶跃响应。

解：在采样周期 $T=1s$ 时，因为闭环脉冲函数为 $\Phi(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$ ，故对应离散系统阶跃

响应程序为

```
num=[0.368 0.264]
den=[1 -1 0.632]
dstep (num,den,50)
```

图 4-11 中，(a) 图为 $T=1s$ 和 $T=0.1s$ 时系统的阶跃响应，其中超调大的为 $T=1s$ 时的阶跃响应，(b) 图为对应连续系统的阶跃响应。由两图可以看出当采样周期较大时（如 $T=1s$ ），离散系统性能变差（超调变大，调节时间加长），当采样周期较小时（如 $T=0.1s$ ），离散系统的性能与连续系统一样。



(a) $T=1s$ 和 $T=0.1s$ 时系统的阶跃响应

(b) 对应连续系统的阶跃响应

图 4-11 例 4-6 阶跃响应曲线仿真图

4.2.2 含有滞后环节的计算机控制系统的输出响应

一般的计算机控制系统都含有滞后特性，来源有两个方面：一是计算机执行控制程序和计算所需要的时间以及执行 A/D 转换时间等；二是被控对象，特别是工业被控对象，大多具有滞后特性，所有这些特性都可以等效为滞后环节。对于含有滞后环节的计算机控制系统，可以应用修正 z 变换在 z 域进行分析，计算系统的输出响应。

考虑图 4-12 所示的含有滞后环节的计算机控制系统。已知 $D(z)$ 为控制器的脉冲传递函数， $G(s) = G_p(s)e^{-\tau s}$ 为被控对象的传递函数，采样周期为 T 。

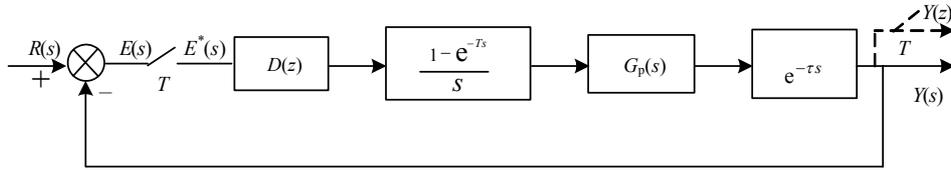


图 4-12 具有滞后环节的计算机控制系统

定义广义的被控对象为 $G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)e^{-\tau s}$ ，设 $\tau = NT + \lambda T$ $0 < \lambda < 1$ $N \geq 1$ 整数，则广义被控对象的脉冲传递函数为

$$G(z) = Z \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)e^{-\tau s} \right] = (1-z^{-1})z^{-N} Z \left[\frac{G_p(s)}{s} e^{-\lambda Ts} \right] \quad (4.24)$$

令 $G_1(s) = \frac{G_p(s)}{s}$ ，则根据修正 z 变换定义，可得

$$Z \left[\frac{G_p(s)}{s} e^{-\lambda Ts} \right] = Z_m \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] = G_1(z, m) \Big|_{m=1-\lambda} \quad (4.25)$$

代入式 (4.24)，即可得到广义被控对象脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1})z^{-N} G_1(z, m) \quad (4.26)$$

系统闭环脉冲传递函数为

$$\phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

因此可知闭环系统的输出为

$$Y(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} R(z)$$

进一步，对 $Y(z)$ 求 z 反变换，即可得到系统输出的离散响应序列。

例 4-7 计算机控制系统如图 4-12 所示， $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ ， $D(z) = 1$ ，滞后时间 $\tau = 0.25T$ ，试求该系统的脉冲传递函数。

解：系统中含有滞后环节 $e^{-\tau s}$ ，滞后时间 $\tau = 0T + 0.25T$ ，则 $\lambda = 0.25$ ，因此

$$m = 1 - \lambda = 0.75$$

广义对象传递函数为

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s) \cdot e^{-\tau s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{e^{-\tau s}}{s+1}$$

根据修正 z 变换, 可得相应的离散脉冲传递函数:

$$\begin{aligned} G(z) = G(z, m) &= (1 - z^{-1}) Z_m \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{e^{-\tau s}}{s(s+1)} \right] = (1 - z^{-1}) z^{-1} Z \left[\frac{e^{-mTs}}{s(s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) z^{-1} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{e^{-mT}}{1 - e^{-T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{(1 - e^{-mT}) z^{-1} + (e^{-mT} - e^{-T}) z^{-2}}{1 - e^{-T} z^{-1}} \end{aligned}$$

由 $T=1s$ 可得

$$G(z) = \frac{0.528z^{-1} + 0.104z^{-2}}{1 - 0.368z^{-1}}$$

系统闭环传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.528z^{-1} + 0.104z^{-2}}{1 + 0.16z^{-1} + 0.104z^{-2}}$$

4.3 计算机控制系统的稳态误差

在连续系统中, 稳态误差的计算可以通过两种方法进行: 一种是建立在拉氏变换终值定理基础上的计算方法, 可以求出系统的终值误差; 另一种是从系统误差传递函数出发的动态误差系数法, 可以求出系统动态误差的稳态分量。由于在离散系统结构图中, 采样开关的不同位置导致离散系统的传递函数不同, 所以误差脉冲传递函数给不出一般的计算公式。离散系统的稳态误差需要根据具体的离散系统结构形式, 利用 z 变换的终值定理方法, 求取离散系统输出响应达到稳态时输入值和输出值在采样时刻的误差。

4.3.1 计算机控制系统的稳态误差分析

设单位反馈误差采样系统如图 4-13 所示。

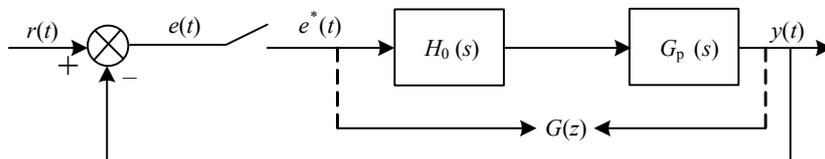


图 4-13 单位反馈离散系统

其中 $H_0(s)$ 为零阶保持器, $G_p(s)$ 为被控对象的传递函数, $e(t)$ 为系统连续误差信号, $e^*(t)$ 为系统误差采样信号, 其 z 变换函数为

$$E(z) = R(z) - Y(z) = [1 - \Phi(z)]R(z) = \Phi_e(z)R(z) \quad (4.27)$$

其中

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{1+G(z)} \quad (4.28)$$

为系统误差脉冲传递函数。

如果 $\Phi_e(z)$ 的极点（即闭环极点）全部严格位于 z 平面的单位圆内，即离散系统是稳定的，则可用 z 变换的终值定理求出采样时刻的终值误差：

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})R(z)}{[1 + G(z)]} \quad (4.29)$$

上式表明，线性定常离散系统的稳态误差不但与系统本身的结构和参数有关，而且与输入序列的形式及幅值有关。对于系统的结构形式，可以把开环脉冲传递函数 $G(z)$ 中具有 $z=1$ 的极点数 ν 作为划分离散系统类型的标准， $\nu=0,1,2$ 时离散系统分别称为0型、I型和II型离散系统。

下面讨论不同类型的离散系统在三种典型输入信号作用下的稳态误差，并建立离散系统静态误差系数的概念。

1. 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入 $r(t)=1(t)$ ，其 z 变换函数为

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

因此，可得单位阶跃输入响应的稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)}$$

定义静态位置误差系数为

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (4.30)$$

则系统对于阶跃输入信号的稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (4.31)$$

若 $G(z)$ 没有 $z=1$ 的极点，则 $K_p \neq \infty$ ，从而 $e(\infty) \neq 0$ ；若 $G(z)$ 有一个或一个以上 $z=1$ 的极点，则 $K_p = \infty$ ，从而 $e(\infty) = 0$ ，因而在单位阶跃函数作用下，系统达到稳态时，0型离散系统在采样时刻存在位置误差；I型或I型以上的离散系统，在采样时刻没有位置误差。这与连续系统相似。

2. 单位速度输入时的稳态误差

对于单位速度输入 $r(t)=t$ ，其 z 变换函数为

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

因此，可得响应单位速度输入的稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})[1 + G(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1})G(z)}$$

定义静态速度误差系数为：

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} \quad (4.32)$$

则系统对于单位速度输入信号的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} \quad (4.33)$$

因为0型系统的 $K_v=0$ ；I型系统的 K_v 为有限值，II型或II型以上的系统 $K_v=\infty$ ，因而在单位速度函数作用下，0型离散系统在采样时刻稳态误差无穷大，I型离散系统在采样时刻存在速度误差；II型或II型以上的离散系统，在采样时刻不存在稳态误差。

3. 单位加速度输入时的稳态误差

对于单位加速度输入 $r(t)=t^2/2$ ，其 z 变换函数为

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

因此，可得响应单位加速度输入的稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^2[1+G(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1-z^{-1})^2 G(z)}$$

定义静态加速度误差系数为

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{T^2} \quad (4.34)$$

则系统对于单位加速度输入信号的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a} \quad (4.35)$$

因为0型及I型系统 $K_a=0$ ，II型系统的 K_a 为常值，III型及III型以上系统 $K_a=\infty$ 。因而，在加速度函数作用下，0型和I型离散系统的稳态误差为无穷大，II型离散系统存在加速度误差，只有III或III型以上的离散系统，在采样时刻不存在稳态误差。不同类型单位反馈离散系统的稳态误差见表4-2。

表4-2 单位反馈离散系统的稳态误差

系统类型	位置误差 ($r(t)=1(t)$)	速度误差 ($r(t)=t$)	加速度误差 ($r(t)=t^2/2$)
0型	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
I型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
II型	0	0	$\frac{1}{K_a}$
III型	0	0	0

4.3.2 计算机控制系统对干扰输入信号的响应

与连续系统一样，计算机控制系统也会受到干扰信号的作用，同时系统的输出对于干扰信号会有一定的响应。对于控制系统而言，总是希望具有良好的抗干扰能力，即系统能够将干扰的影响降到最低，直至消除。但是，干扰在计算机控制系统中的作用位置不同，对系统的影响也不同。

1. 干扰作用在控制系统的前向通道

假设受到干扰作用的控制系统如图 4-14 (a) 所示, 设参考输入为 0, 系统受到的干扰为 $N(z)$ 。

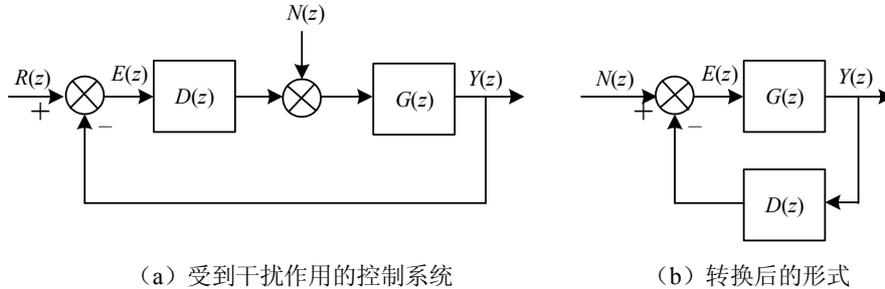


图 4-14 干扰作用在前向通道的计算机控制系统

在 $R(z)=0$ 时, 系统框图可以转换为图 4-14 (b) 所示。以 $N(z)$ 为输入, $Y(z)$ 为输出的脉冲传递函数为

$$\frac{Y(z)}{N(z)} = \frac{G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (4.36)$$

如果 $|D(z)G(z)| \gg 1$, 则有

$$\frac{Y(z)}{N(z)} = \frac{1}{D(z)} \quad (4.37)$$

于是系统误差为

$$E(z) = R(z) - Y(z) = -Y(z)$$

因此由干扰所引起的系统误差为

$$E(z) = -Y(z) = -\frac{1}{D(z)}N(z) \quad (4.38)$$

由式 (4.38) 可以看出, $D(z)$ 的增益越大, 干扰引起的误差 $E(z)$ 就越小。如果 $D(z)$ 有积分环节 ($z=1$ 的极点), 那么扰动对系统的稳态误差为 0。这一点从下面的推导中可以得知。

设干扰为幅值 N 的常值扰动, 即

$$N(z) = \frac{N}{1 - z^{-1}}$$

如果 $D(z)$ 含有一个 $z=1$ 的极点, 则 $D(z)$ 可以写成如下形式

$$D(z) = \frac{\bar{D}(z)}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\bar{D}(z)$$

式中, $\bar{D}(z)$ 不含有 $z=1$ 的极点, 那么在干扰作用下, 系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1})E(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{-N(z)}{D(z)} \right] \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{N}{1 - z^{-1}} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}\bar{D}(z)} \right] \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})N}{\bar{D}(z)z^{-1}} = 0 \end{aligned}$$

2. 干扰作用在控制系统的反馈通道

假设干扰作用在反馈通道的控制系统如图 4-15 (a) 所示, 在输入 $R(z)=0$ 时, 系统可以转换为

图 4-15 (b) 所示的结构框图。

由图 4-15 (b) 可知:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{-N(z)} &= \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \\ \frac{Y(z)}{N(z)} &= -\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

由 $E(z) = R(z) - Y(z) = -Y(z)$ 可得

$$\frac{E(z)}{N(z)} = -\frac{Y(z)}{N(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} \quad (4.40)$$

由式 (4.40) 可以看出, 为了减小扰动 $N(z)$ 对误差 $E(z)$ 的影响, 则 $D(z)G(z)$ 增益应尽可能小。

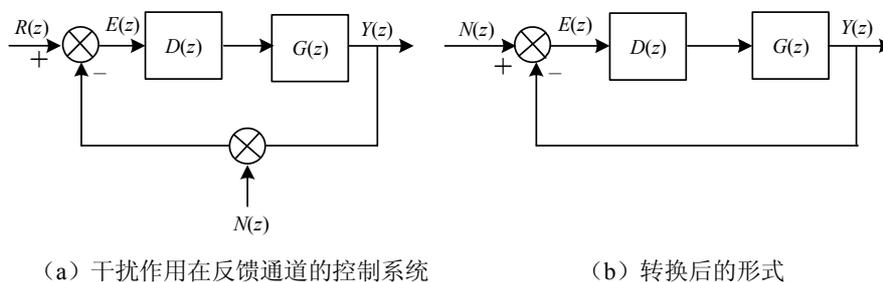


图 4-15 干扰作用在反馈通道的计算机控制系统

综上所述, 在考虑扰动对误差的影响时, 应先求出 $E(z)/N(z)$ 的表达式, 再确定 $D(z)G(z)$ 的增益是应该大还是应该小。但是, $D(z)G(z)$ 增益的大小, 除了要考虑扰动的作用外, 还要考虑系统输入的作用。如果输入信号的频率范围和扰动信号的频率范围分离得足够大, 可以在系统中选择合适的滤波器; 如果它们的频率范围重叠, 则必须修改系统框图, 以便使系统对参考输入以及扰动作用都有满意的响应。

4.4 离散系统根轨迹

在连续系统中, 根轨迹法是分析和设计线性定常控制系统的一种常用方法。由于其可以非常直观方便地分析系统的稳定性、稳态性能及动态性能等, 所以在工程实践中获得了广泛的应用。连续系统根轨迹是研究开环系统某一参数从零变到无穷大时, 闭环系统特征方程的根在 s 平面上变化的轨迹。相应地, 离散系统根轨迹是研究离散系统开环脉冲传递函数某一参数从零变到无穷大时, 闭环系统特征方程的根在 z 平面上变化的轨迹。

考虑图 4-16 所示的线性定常离散系统, $H_0(s)$ 为零阶保持器。

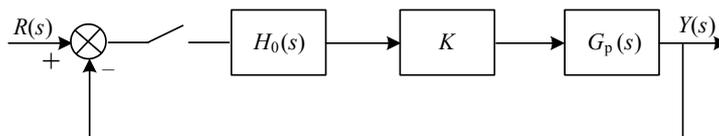


图 4-16 线性定常离散系统

其广义开环脉冲传递函数为

$$KG(z) = K(1-z^{-1})Z[G_p(s)/s] \quad (4.41)$$

系统的闭环特征方程为

$$1 + KG(z) = 0 \quad (4.42)$$

将式 (4.42) 写成下列两个式子:

$$|KG(z)| = 1 \quad (4.43)$$

$$\angle KG(z) = \pm(2l+1)180^\circ \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

式 (4.43) 和 (4.44) 就是闭环系统特征方程的根所应满足的幅值条件和相角条件。当参数 K 从 0 到 ∞ 变化时, 所有满足该幅值条件和相角条件的点在 z 平面上的轨迹就是该离散系统的根轨迹。

进一步, 考虑开环脉冲传递函数为如下所示的零极点形式:

$$KG(z) = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (4.45)$$

式中, z_i 为开环脉冲传递函数的零点; p_i 为开环脉冲传递函数的极点。

闭环系统的极点在 z 平面上应满足的条件可改写为

$$\frac{\prod_{i=1}^m |z - z_i|}{\prod_{i=1}^n |z - p_i|} = \frac{1}{K} \quad (4.46)$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - p_i) = \pm(2l+1)180^\circ \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.47)$$

由式 (4.46) 和 (4.47) 可以看出, 离散系统根轨迹所满足的条件与连续系统根轨迹的条件在形式上相同, 所以在 z 平面上绘制离散系统根轨迹的方法与在 s 平面绘制连续系统根轨迹类似。

绘制离散系统根轨迹的基本步骤如下:

(1) 求出以零极点形式表示的系统开环传递函数, 在 z 平面上画出开环零极点。

(2) 确定根轨迹的起点和终点, 并找出根轨迹的分支数。

根轨迹起于开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的极点, 终止于开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的零点; 根轨迹的条数等于开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的极点个数 (通常极点数大于零点)。

(3) 确定实轴上的根轨迹。

实轴上的某一区域, 如果它右侧开环实数零、极点个数之和为奇数, 则该区域必是根轨迹的一部分。

(4) 确定根轨迹的渐近线。

渐近线的个数等于开环脉冲传递函数 $G(z)$ 的极点数 n_p 与零点 n_z 之差, 且渐近线与实轴的交角 φ 和交点 σ 分别为

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n_p - n_z} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n_p - n_z - 1) \quad (4.48)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n_p - n_z} \quad (4.49)$$

(5) 找出根轨迹的分离点和会合点。如果根轨迹位于实轴上两个相邻开环极点之间，则这两个极点之间至少存在一个分离点；同样，如果根轨迹位于实轴上两个相邻开环零点之间（一个零点可以位于无穷远处），则这两个零点之间至少存在一个会合点；如果根轨迹位于实轴上一个开环极点和一个开环零点之间，则既不存在分离点也不存在会合点，或者两者都存在。

设 $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ，则根轨迹的分离点和会合点由下面的式子求解：

$$\frac{d[G(z)]}{dz} = 0 \quad (4.50)$$

即

$$D(z) \frac{dN(z)}{dz} - N(z) \frac{dD(z)}{dz} = 0 \quad (4.51)$$

例 4-8 系统如图 4-17 所示， $H_0(s)$ 为零阶保持器，设 $G_p(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ， $T=1s$ ，试绘制系统的根轨迹，并确定系统临界稳定时的增益 K 。

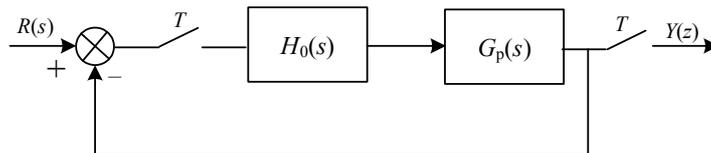


图 4-17 例 4-8 图

解：开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[H_0(s)G_p(s)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s}G_p(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= \frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)} \end{aligned}$$

故系统开环极点为 $z=1$ 和 $z=0.368$ ，开环零点为 $z=-0.717$ 和 $z=\infty$ 。

由式 (4.51) 可计算分离点：

$$\begin{aligned} \frac{dG(z)}{dz} &= (z-1)(z-0.368) - (z+0.717)(2z-1.368) \\ &= z^2 + 1.434z - 1.352 \end{aligned}$$

可求得根轨迹分离点为 $z=0.65$ 、会合点为 $z=-2.08$ 。

再根据幅值条件 (4.46) 可以求出分离点处增益 $K=0.196$ 、会合点处增益 $K=15$ ，由以上原则，可画出其根轨迹如图 4-18 左图所示。

对于本例，也可通过编写下列 MATLAB 程序用计算机画出其根轨迹，如图 4-18 右图所示。

```
k=0:0.1:16;
n=[0.368 0.264];
```

```

d=[1-1.368 0.368];
r=rlocus(n,d,k);
plot(real(r),imag(r),'x')
title('Root Locus')

```

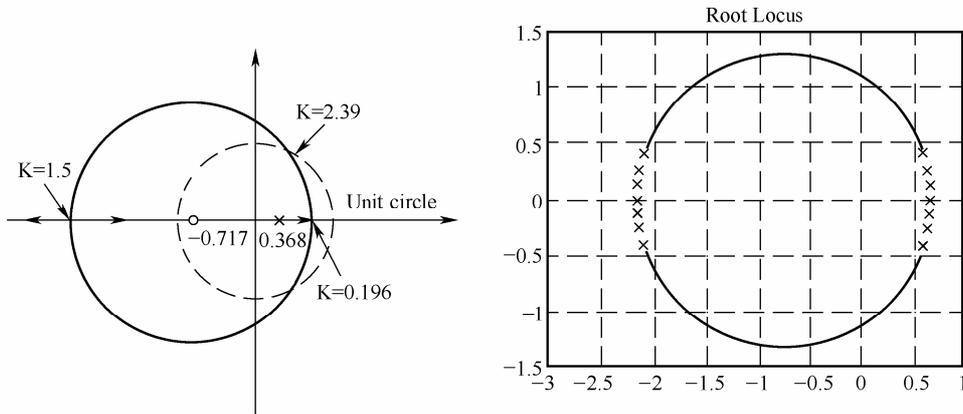


图 4-18 例 4-8 根轨迹图

在 z 平面上，根轨迹与单位圆的交点就是系统的临界稳定点。

对于系统临界稳定点，一方面可以通过画系统根轨迹，找出它与单位圆的交点来确定，另一方面还可以应用稳定性判据，求出系统的临界增益 K ，再将此 K 值代入系统特征方程，求出临界稳定时的特征根来确定。

对于本例，根据稳定性判据可以求出系统临界增益 $K=2.39$ ，此时特征方程为 $z^2 - 0.488z - 1 = 0$ ，所以临界点为

$$z = 0.244 \pm j0.970 = 1 \angle \pm 75.8^\circ = 1 \angle \pm 1.32 \text{ rad} = 1 \angle \pm \omega T, \quad \omega = 1.32 \text{ rad/s}$$

思考题与习题

4.1 s 平面上有两对极点，分别为 $s_{1,2} = -1 \pm j1.6$ ， $s_{3,4} = -1 \pm j4.5$ ，采样频率 $\omega_s = 8\text{Hz}$ ，试求在 z 平面上相应极点的位置。

4.2 已知闭环离散系统的特征方程式为

$$D(z) = z^3 - 1.001z^2 + 0.3356z + 0.00535 = 0$$

试用修正劳斯判据判断该系统是否稳定。

4.3 设离散系统如图 4-19 所示，采样周期 $T = 1\text{s}$ ， $H_0(s)$ 为零阶保持器，而

$$G_p(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)}$$

要求：

- (1) 当 $K = 5$ 时，分别在 z 域和 w 域中分析系统的稳定性。
- (2) 确定使系统稳定的 K 值范围。
- (3) 求系统的稳态误差系数。

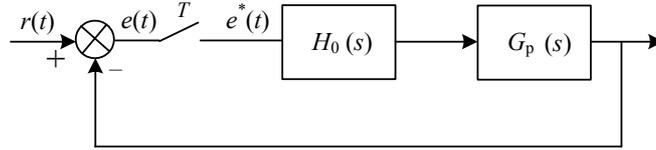


图 4-19 题 4.3 图

4.4 已知系统如图 4-20 所示，确定满足系统稳定的 K 值范围。

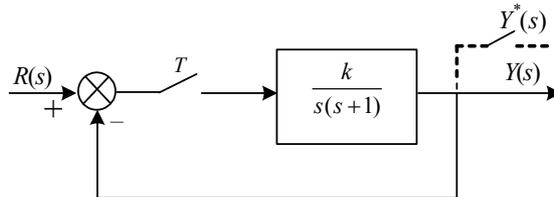


图 4-20 题 4.4 图

4.5 已知离散控制系统的闭环特征多项式如下：

- (1) $W(z) = z^2 - 1.5z + 0.5$
- (2) $W(z) = 3z^4 + z^3 - z^2 - 2z + 1$
- (3) $W(z) = z^3 - 2.3z^2 + 1.7z - 0.4$
- (4) $W(z) = z^4 - 1.4z^3 + 0.4z^2 + 0.8z + 0.002$

试用朱利稳定性判据判断闭环系统的稳定性。

4.6 已知单位反馈控制系统开环传递函数为

$$G(z) = \frac{2z^2 - 3z + 1}{3z^4 + 4z^3 + 7z - 1}$$

试用修尔-科恩判据判别系统的稳定性。

4.7 控制系统如图 4-21 所示， $T = 0.2s$ ， $K = 1$ ，系统输入为阶跃信号，求系统输出 $y(kT)$ ，并确定 $y(\infty)$ 。

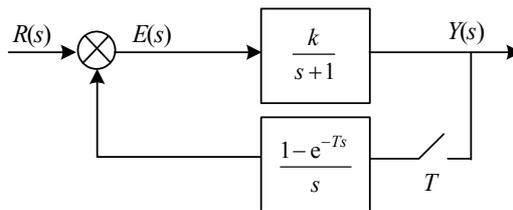


图 4-21 题 4.7 图

4.8 已知离散控制系统的结构如图 4-22 所示，采样周期 $T = 0.2s$ ，输入信号 $r(t) = 1 + t + \frac{1}{2t^2}$ ，求该系统的稳态误差。

4.9 已知离散控制系统如图 4-23 所示， $T = 1s$ ，试绘制系统的根轨迹图，并求出临界增益。

4.10 某机器人关节控制系统结构如图 4-24 所示。

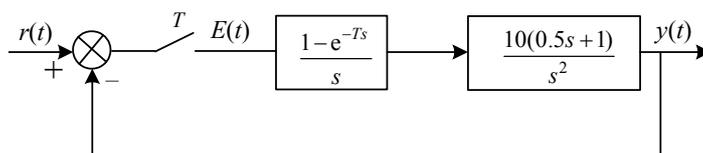


图 4-22 题 4.8 图

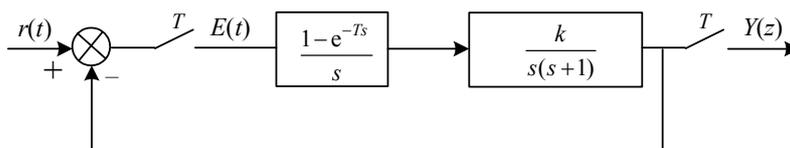


图 4-23 题 4.9 图

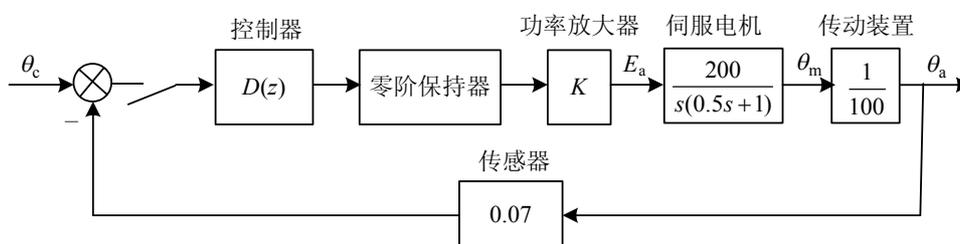


图 4-24 题 4.10 图

设 $T = 0.1s$, $D(z) = 1$ 。试求：

- (1) 闭环系统特征方程。
- (2) 用修正劳斯判据判别使系统稳定时 K 的变化范围。
- (3) 系统临界稳定时, z 平面和 w 平面特征方程所有根的位置。
- (4) 系统临界稳定时, z 平面和 w 平面的振荡频率。
- (5) 通过计算机仿真, 验证上述结果。