

第 5 章 一阶动态电路分析

【本章重点】

- 动态元件电感、电容的特性。
- 初始值的求法、动态电路方程的建立及求解。
- 零输入响应、零状态响应、暂态响应和稳态响应的含义及其分析计算方法。
- 输入为直流信号激励下的一阶电路的三要素分析法。

【本章难点】

- 零输入响应、零状态响应、暂态响应和稳态响应的分析计算方法。
- 输入为直流信号激励下的一阶电路的三要素分析法。

在前面的章节中，讨论了由电阻元件和电源构成的电阻电路的分析方法。电阻电路是用代数方程来描述的，这就意味着如果外施的激励源（电压源或电流源）为常量，那么，当激励作用到电路的瞬间，电路的响应也立即为某一常量。例如，在一个由电压源和电阻元件组成的电路中，电路中电压与电流的关系是由 $u = Ri$ 这一线性代数方程来描述的，如果电源电压为 5V，电阻为 5Ω ，则在 5V 电压（激励）施加于电路的瞬间，电路中立即就会有 1A 的电流（响应）；如果电源电压变为 10V，电路中的电流也立即变为 2A。这就是说，电阻电路在任一时刻 t 的响应仅与同一时刻的激励有关，而与过去的激励无关。因此，电阻电路是“无记忆”的或“即时”的，因而电阻元件也称无记忆元件或即时元件。本章将要介绍的电容元件和电感元件是不同于电阻元件的，它们都是具有“记忆”的元件。

5.1 电容元件和电感元件

在许多实际电路中，并不是只用电阻元件和电源元件来构成它的模型，往往不可避免地要包含电容元件和电感元件。包含电容元件、电感元件的电路称为动态电路。动态电路在任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关，这与电阻电路是完全不同的。例如，一个动态电路，尽管输入已不再作用，但仍然可以有输出，因为输入曾经作用过。这就是说，动态电路是具有记忆的，因此电容元件和电感元件也叫记忆元件和动态元件，这两种元件的伏安关系都涉及对电流、电压的微分或积分。

5.1.1 电容元件

电容元件是实际电容器的理想化模型。电容元件的符号如 5-1（a）所示。

把两块金属极板用绝缘介质隔开，就构成一个简单的电容器，其原理模型如图 5-1（b）所示。两块金属板称为电容器的极板，其上引出的金属导线作为接线端子，极板间是理想介质。由于理想介质是不导电的，在外电源作用下，两块极板上能分别储存等量的异性电荷，并在介质中形成电场。当外电源撤走后，这些电荷依靠电场力的作用，互相吸引，但又因介质绝缘而不能中和，因而极板上的电荷能长久地储存。因此，电容器是一种能储存电荷的部件，并在电荷所建立的电场中，储存着能量，因此也可以说电容器是一种能够储存电场能量的部件。由此，

可以定义出一种电容元件作为实际电容器的理想化模型。电容元件的定义为：如果一个二端元件，在任一时刻 t ，它的电荷 $q(t)$ 与它的端电压 $u(t)$ 之间的关系可以用 $u-q$ 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电容元件，若该曲线为 $u-q$ 平面上通过原点且斜率不随时间变化的一条直线，如图 5-2 所示，则此电容元件称之为线性、非时变电容元件。这里讨论的仅指线性非时变电容元件。

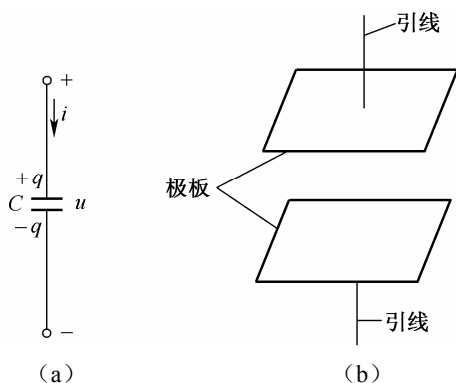


图 5-1 电容元件的符号和电容器的原理模型图

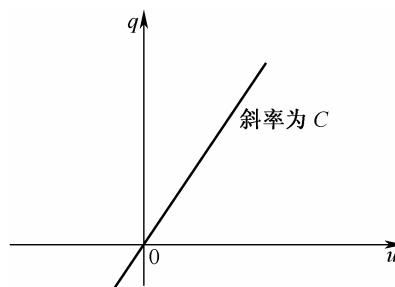


图 5-2 线性非时变电容的特性曲线

当电容元件上电压与电荷的参考方向为关联时，如图 5-1 (a) 所示，电荷量 q 与其两端的电压的关系为

$$q(t) = Cu(t) \quad (5-1)$$

式中， C 是电容元件的电容量，为正值常数，亦即特性曲线的斜率。电容的单位是法拉，简称法，用 F 表示。法是电容很大的单位，一般常用微法 (μF)，皮法 (pF) 等来表示。其关系为

$$1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$$

或

$$1pF = 10^{-6} \mu F = 10^{-12} F$$

习惯上，我们常把电容元件简称为电容，其符号 C 既表示元件的参数，也表示电容元件。

由式 (5-1) 可知，当电容两端的电压升高时，其储存的电荷量增加，这一过程称为充电；而当电压降低时，电荷量减少，这一过程称为放电。电容在充放电过程中，它所储存的电荷随时间而变化。在电路分析中，我们感兴趣的往往是元件的 VCR，当 u 、 i 为关联参考方向时，根据电流强度的定义

$$i = \frac{dq}{dt}$$

将式 (5-1) 代入可得

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (5-2)$$

若 u 、 i 为非关联参考方向，则

$$i = -C \frac{du}{dt} \quad (5-3)$$

式 (5-2) 是电容元件伏安关系的微分形式，此式表明：在任一时刻 t ，通过电容的电流与该时刻电压的变化率成正比，即电压变化越快，电流越大，即使某时刻电压为零，也可能有电

流, 电容相当于短路。当电压为恒定值时, 由于电压不随时间而变, 即使电压很大, 也没有电流, 电容相当于开路, 所以称电容有隔断直流的作用。

式(5-2)还表明了电容的一个重要性质: 如果在任何时刻, 通过电容的电流为有限值, 那么, du/dt 就必须为有限值, 这就意味着电容两端的电压不可能发生跃变, 而只能是连续变化的。

对式(5-2)两边同时积分, 电容的伏安关系还可写成

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \quad (5-4)$$

上式称为电容元件伏安关系的积分形式。式中把积分号内的时间变量 t 改用 ξ 表示, 以区别于积分上限 t 。积分下限 $-\infty$ 抽象表示电容未充电的时刻, 在该时刻电容电压 $u(-\infty) = 0$ 。

如果取 $t = 0$ 作为研究电容电压变化规律的起始时刻, 可以把式(5-4)写为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi \\ &= u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5-5)$$

式中, $u(0)$ 是在 $t = 0$ 时刻电容上已经积累的电压, 称为电容的初始电压或初始状态。

$u(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\xi) d\xi$ 体现了起始时刻 $t = 0$ 之前电流对电压的贡献; 而 $\frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi$ 是在 $t = 0$ 以后电容上形成的电压, 体现了在 $0 \sim t$ 时间内电流对电压的贡献。式(5-5)告诉我们: 在某一时刻 t , 电容电压 u 不仅与该时刻的电流 i 有关, 而且与 t 以前电流的全部历史状况有关。因此, 我们说电容是一种记忆元件, 有“记忆”电流的作用。

【例 5-1】 在图 5-3 (a) 所示电路中, 已知电容 $C = 1\text{F}$, 电容电压 $u(t)$ 的波形如图 5-3 (b) 所示, 试求电容电流 $i(t)$ 的表达式, 并作出波形图。

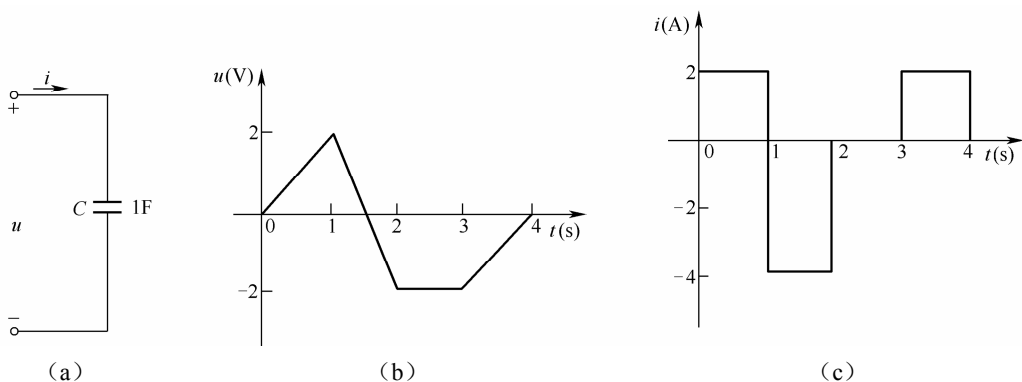


图 5-3 例 5-1 图

解: 先写出 $u(t)$ 的表达式

$$u(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1\text{s} \\ -4(t - 3/2) & 1\text{s} \leq t < 2\text{s} \\ -2 & 2\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 2(t - 4) & 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

根据 $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$, 则:

在 $0 \leq t < 1\text{s}$ 时, $u(t) = 2t$

$$i(t) = 1 \times \frac{d(2t)}{dt} = 2\text{A}$$

在 $1\text{s} \leq t < 2\text{s}$ 时, $u(t) = -4(t - 3/2) = 6 - 4t$

$$i(t) = 1 \times \frac{d(6 - 4t)}{dt} = -4\text{A}$$

在 $2\text{s} \leq t < 3\text{s}$ 时, $u(t) = -2$

$$i(t) = 0$$

在 $3\text{s} \leq t < 4\text{s}$ 时, $u(t) = 2(t - 4)$

$$i(t) = 1 \times \frac{d(2t - 8)}{dt} = 2\text{A}$$

综合以上有

$$i(t) = \begin{cases} 2\text{A} & 0 \leq t < 1\text{s} \\ -4\text{A} & 1\text{s} \leq t < 2\text{s} \\ 0 & 2\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 2\text{A} & 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

$i(t)$ 的波形如图 5-3 (c) 所示。

值得注意的是, 应采用分段的形式写出电压 $u(t)$ 的表达式, 然后分段计算电流 $i(t)$ 的值。

对电压 u 的分段原则是, 在该段时间内, 波形具有同一函数表达式。

【例 5-2】 在图 5-4 (a) 所示的电路中, $C = 1\text{F}$, $u(0) = 0$, 电流 i 的波形如图 5-4 (b) 所示。试说明: (1) 当 $t = 0$ 、 1s 、 2s 时电容电压的变化是否连续? (2) 作出 $u(t)$ 的波形图。

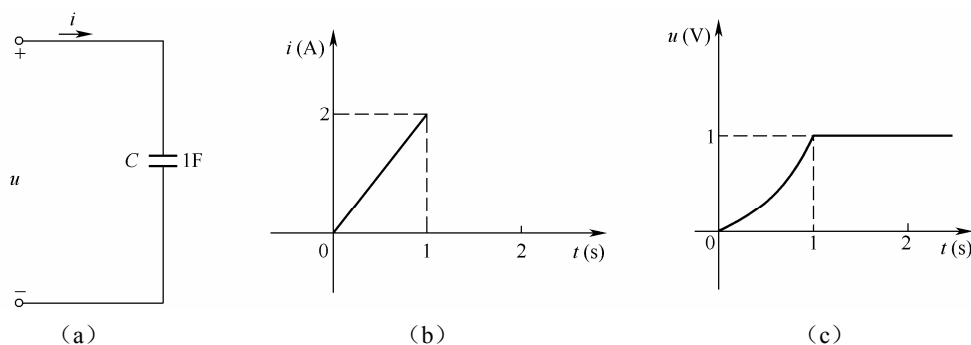


图 5-4 例 5-2 图

解: (1) 由电流波形图可知, 当 $t = 0$ 时, $i = 0$ 。当 $t = 1\text{s}$ 时, 电流从 2A 跳变到 0 , 但为有界值。根据电容电压的连续性可以判定, 在上述时刻电容电压的变化是连续的, 不会发生跳变。

(2) 电流 i 的分段表达式为

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t < 1\text{s} \\ 0 & t \geq 1\text{s} \end{cases}$$

当 $0 \leq t < 1\text{s}$ 时

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = \int_0^t 2\xi d\xi = t^2 \text{V}$$

当 $t = 1\text{s}$ 时, $u(1) = 1\text{V}$

当 $t > 1\text{s}$ 时, $i = 0$, 故 $u = 1\text{V}$ 保持不变。

综合以上有

$$u(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1\text{s} \\ 1 & t \geq 1\text{s} \end{cases}$$

电压的波形如图 5-4 (c) 所示, 它是一个连续变化的波形。

当电容电压和电流取关联方向时, 电容吸收的瞬时功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \quad (5-6)$$

瞬时功率 $p(t)$ 可正可负。当 $p(t) > 0$ 时, 说明电容实际上是在吸收能量, 即处于充电状态; 当 $p(t) < 0$ 时, 说明电容供出能量, 处于放电状态。

对式 (5-6) 从 $-\infty$ 到 t 进行积分, 即得 t 时刻电容上的储能为

$$\begin{aligned} w_c(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t Cu(\xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{u(-\infty)}^{u(t)} Cu(\xi) du(\xi) = \frac{1}{2} Cu^2(t) - \frac{1}{2} Cu^2(-\infty) \end{aligned}$$

式中, $u(-\infty)$ 表示电容未充电时刻的电压值, 应有 $u(-\infty) = 0$ 。于是上式可简化为

$$w_c(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (5-7)$$

由式 (5-7) 可知: 电容在某一时刻 t 的储能仅取决于此时刻的电压, 而与电流无关, 且 $w_c(t) \geq 0$ 。电容在充电时吸收的能量全部转换为电场能量, 放电时又将储存的电场能量释放回电路, 它本身不消耗能量, 也不会释放出多于它所吸收的能量, 所以又称电容为储能元件和无源元件。

【例 5-3】 有 2A 的恒定源, 从 $t = 0$ 开始对 $C = 0.5\text{F}$ 的电容充电, 求 20s 后电容所储存的能量是多少? 设电容的初始电压 $u(0) = 0$ 。

$$\text{解: 由 } u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = 0 + \frac{1}{0.5} \int_0^t 2 d\xi = \frac{1}{0.5} \times 2\xi \Big|_0^t = 4t \text{ V}$$

当 $t = 20\text{s}$ 时, $u(t) = 80\text{V}$, 所以

$$w(20) = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 80^2 = 1600\text{J}$$

5.1.2 电感元件

把金属良导线绕在一骨架上, 就构成了一个实际电感器, 如图 5-5 所示。当电感器中有电

流通过时，就会在其周围产生磁场，并储存磁场能量。由于电感器是由导线绕制而成的，会有一定的电阻，但导线的电阻很微小，如忽略电阻等引起的次要效应，电感器就成为理想化的电感元件。

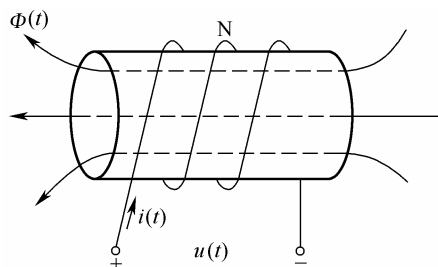


图 5-5 实际电感器

当电流通过电感器时，有磁通 Φ 穿过每匝线圈，若线圈有 N 匝，则与线圈交链的总磁通为 $N\Phi$ ，称作磁链 ψ ，而 $\psi = N\Phi$ 。磁通 Φ 、磁链 ψ 都是由线圈本身的电流所产生的，磁链是电流 i 的函数，即

$$\psi = f(i)$$

ψ 与 i 的关系可以用 $i-\psi$ 平面上的曲线表示，该曲线称为电感元件的特性曲线。如果特性曲线是一条通过原点且斜率不随时间变化的直线，则此电感元件称为线性非时变电感元件，如图 5-6 (a) 所示。这里讨论的仅指线性非时变电感元件。

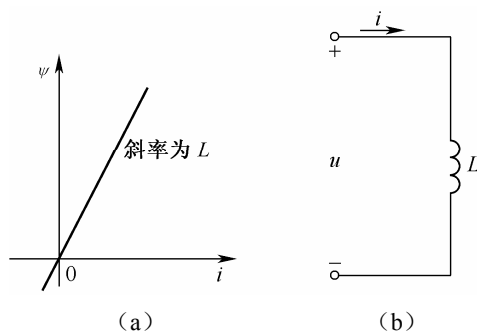


图 5-6 线性非时变电感元件特性曲线及符号

当规定磁通 Φ 的参考方向与电流 i 的参考方向之间符合右手螺旋关系时，磁链与电流的关系为

$$\psi(t) = Li(t) \quad (5-8)$$

式中， L 称为电感元件的电感或自感（即特性曲线的斜率），用图 5-6 (b) 中符号表示。 L 既表示元件参数，也表示电感元件。在国际单位制中， ψ 的单位是韦伯 (Wb)， i 的单位是安培 (A)，则 L 的单位是亨利 (H)，常用单位还有毫亨 (mH) 和微亨 (μH)，它们之间的关系是

$$1\text{H} = 10^3\text{mH} = 10^6\mu\text{H}$$

或

$$1\mu\text{H} = 10^{-3}\text{mH} = 10^{-6}\text{H}$$

当变化的电流通过电感线圈时，在线圈周围产生变化的磁链，根据电磁感应定律，当穿

过线圈的磁链随时间变化时,线圈中将产生感应电动势 e ,若 e 与 i 采用关联参考方向 (e 的参考方向是由“-”极经电感元件内部指向“+”极),则

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

将式(5-8)代入得

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

习惯上,电压 u 与电流 i 采用关联参考方向,则有

$$u = -e = L \frac{di}{dt} \quad (5-9)$$

这是电感元件伏安关系的微分形式。由式(5-9)可知:

(1) 电感上任一时刻的自感自压 u 取决于同一时刻的电感电流 i 的变化率。即电流变化越快 (di/dt 越大), u 也越大,即使某时刻 $i=0$,也可能有电压,此时电感相当于开路。

(2) 当电流 i 为恒定值时,由于电流不随时间变化,则 $u=0$,电感相当于短路。

(3) 若任一时刻电感电压为有限值,电感电流 i 不能跃变。

对式(5-9)两边同时积分,则电感的电压和电流关系还可写成

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_0^t u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\xi) d\xi \quad (5-10)$$

式中, $i(0)$ 是在 $t=0$ 时刻电感上已积累的电流,体现了 $t=0$ 之前电压对电流的贡献,称为电感的初始电流或初始状态。 $\frac{1}{L} \int_0^t u(\xi) d\xi$ 是 $t=0$ 之后在电感中形成的电流。式(5-10)说明:任一时刻的电感电流,不仅取决于该时刻的电压值,还取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时间的电压值,即与电压过去的全部历史有关。它也是一种记忆元件。

当电感电压和电流取关联方向时,电感吸收的瞬时功率为

$$p(t) = u(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (5-11)$$

与电容一样,电感的瞬时功率可正可负。正值表示电感从电路吸收功率,储存磁场能量;负值表示供出功率,释放磁场能量。可见,电感也是一种储能元件。

对式(5-11)从 $-\infty$ 到 t 进行积分,即 t 时刻电感上储能为

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \int_{-\infty}^t p(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^t Li(\xi) \frac{di(\xi)}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li(\xi) di(\xi) = \frac{1}{2} L[i^2(t) - i^2(-\infty)] \end{aligned}$$

因为 $i(-\infty) = 0$

$$\text{所以} \quad w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (5-12)$$

由上式可知:电感在某一时刻的储能仅取决于该时刻的电流值,只要有电流存在,就有储能,且储能 $w_L(t) \geq 0$ 。与电容元件一样,它也是一种无源元件。

【例 5-4】在图 5-7 (a) 中, 已知 $L=2H$, $i(t)$ 的波形如图 5-7 (b) 所示, 试计算 $t>0$ 时电感电压 $u(t)$ 、瞬时功率 $p(t)$, 并绘出它们的波形。

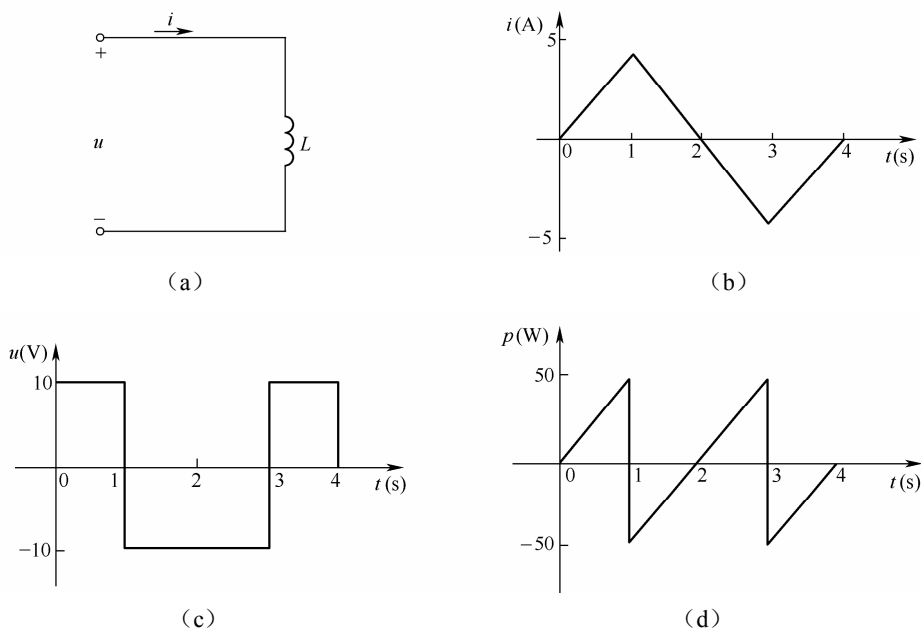


图 5-7 例 5-4 图

解: 电流 $i(t)$ 的表达式可分段写出, 即

$$i(t) = \begin{cases} 5t & 0 \leq t < 1s \\ -5t + 10 & 1s \leq t < 3s \\ 5t - 20 & 3s \leq t < 4s \end{cases}$$

根据 $u(t) = L \frac{di}{dt}$, 求 $u(t)$

在 $0 \leq t < 1s$ 内, $i(t) = 5t A$

$$u(t) = 2 \frac{d(5t)}{dt} = 2 \times 5 = 10V$$

在 $1s \leq t < 3s$ 内, $i(t) = -5t + 10A$

$$u(t) = 2 \frac{d(-5t + 10)}{dt} = 2 \times (-5) = -10V$$

在 $3s \leq t < 4s$ 内, $i(t) = 5t - 20A$

$$u(t) = 2 \frac{d(5t - 20)}{dt} = 2 \times 5 = 10V$$

综合以上有

$$u(t) = \begin{cases} 10V & 0 \leq t < 1s \\ -10V & 1s \leq t < 3s \\ 10V & 3s \leq t < 4s \end{cases}$$

电压 $u(t)$ 的波形如图 5-7 (c) 所示。

再根据 $p(t) = u(t)i(t)$ 有

$$p(t) = \begin{cases} 50t \text{ W} & 0 \leq t < 1\text{s} \\ 50(t-2) \text{ W} & 1\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 50(t-4) \text{ W} & 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

$p(t)$ 的波形如图 5-7 (d) 所示。

思考与练习

5-1 某时刻的电容电压为零, 该时刻的电容电流是否一定为零? 某时刻的电容电流为零, 该时刻的电容电压是否一定为零?

5-2 在电感电压为有限值时, 电感电流是不能跃变的, 为什么?

5-3 在图 5-8 (a) 所示电路中, $u_s(t)$ 波形如图 5-8 (b) 所示: (1) 求电流 i_C 及功率 $p(t)$; (2) 求 $t = 3\text{s}$ 时的功率。

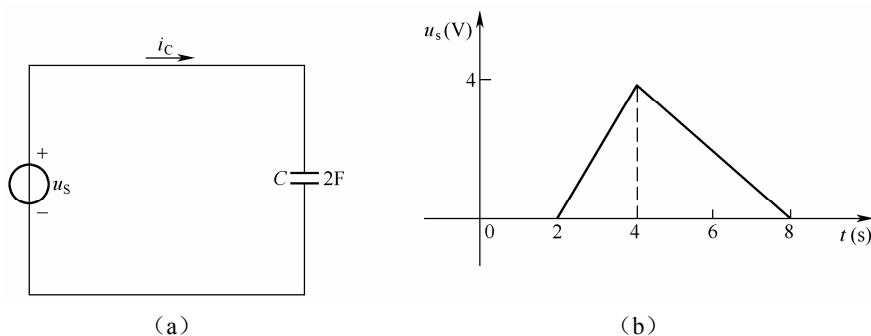


图 5-8 练习题 5-3 图

5-4 在图 5-9 所示的电路中, 已知 $L = 0.1\text{H}$, 若电流源 $i_s(t) = 5\sin 100t \text{ A}$, $t \geq 0$, 求 $u(t)$ 。



图 5-9 练习题 5-4 图

5.2 换路定律及初始值的确定

在分析动态电路时, 确定电压、电流的初始值是十分重要的问题。动态电路需用微分方程描述, 求解微分方程必须知道初始条件, 否则无法求出解答, 由于电路中的变量是电压或电流, 因此, 电路的初始条件包括待求电压、电流变量的初始值。要求初始值, 需应用换路定律。

5.2.1 换路定律

通常, 我们把电路中开关的接通、断开或电路参数的突然变化等统称为“换路”。我们研

究的是换路后电路中电压或电流的变化规律，知道了电压、电流的初始值，就能掌握换路后电压、电流是从多大的初始值开始变化的。

在本章中前面已经指出：如果电容的电流保持为有限值，则电容电压不能跃变，即换路后一瞬间的电容电压值与换路前一瞬间的电容电压值相等；如果电感电压保持为有限值，则电感电流不能跃变，即换路后一瞬间的电感电流值与换路前一瞬间的电感电流值相等。通常，将换路瞬间定为 $t=0$ 时刻，换路前的瞬间用 $t=0_-$ 表示，接路后的瞬间用 $t=0_+$ 表示。因此，换路定律可表达为

$$\left. \begin{aligned} u_C(0_+) &= u_C(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

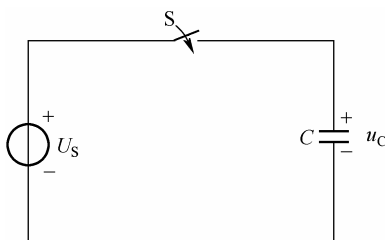


图 5-10 电容与理想电压源接通

需要特别注意的是：在换路时，只有 u_C 及 i_L 受换路定律的约束而保持不变，电路中其他的电压、电流是不受换路定律约束的，都可能发生跃变。还需指出，电路在特定的理想情况下，电容电压与电感电流也可能发生跃变。如图 5-10 所示，将电容元件与理想电压源接通， u_C 会跃变为 U_s 。

5.2.2 初始值的确定

我们研究的重点是电路发生换路后 ($t>0$) 的电路响应，所以关心的是在 $t=0_+$ 的初始值 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。可以利用 $t=0_-$ 电路，即由换路前 ($t<0$ 时) 电路的稳定工作状态来确定 $u_C(0_-)$ 及 $i_L(0_-)$ ，再根据换路定律，即可得到 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 的值。

电路中其他变量，如 i_R 、 u_R 、 i_C 和 u_L 的初始值不存在 $t=0_+$ 与 $t=0_-$ 时的值相等的规律性，它们的初始值 $i_R(0_+)$ 、 $u_R(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 需要根据 $t=0_+$ 的等效电路来求得。其具体的求法是：画出换路后 $t=0_+$ 时刻的等效电路（简称 $t=0_+$ 电路），根据置换定理，在 $t=0_+$ 电路中，若 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_s \neq 0$ ，此时电容元件用一个电压为 U_s 的电压源代替；若 $u_C(0_+)=0$ ，则电容元件用短路线代替。在 $t=0_+$ 电路中，若 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_s \neq 0$ ，此时电感元件用一个电流为 I_s 的电流源代替；若 $i_L(0_+)=0$ ，则电感元件作开路处理。下面举例说明初始值的求法。

【例 5-5】 在图 5-11 (a) 电路中，开关 S 在 $t=0$ 时闭合，开关闭合前电路已处于稳定状态。试求初始值 $u_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

解：(1) 电路在 $t=0$ 时发生换路，要求各电压、电流的初始值，应先求 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。通过换路前处于稳定状态下的等效电路 ($t=0_-$ 电路) 可求得 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。在直流稳态电路中， u_C 不再变化， $du_C/dt=0$ ，故 $i_C=0$ ，即电容 C 相当于开路。同理 i_L 也不再变化，

$di_L/dt=0$, 故 $u_L=0$, 即电感 L 相当于短路。所以 $t=0_-$ 时刻的等效电路如图 5-11 (b) 所示, 由该图可知

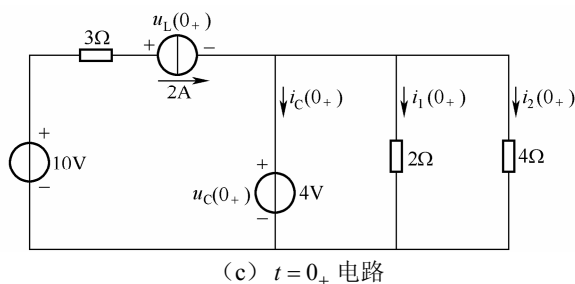
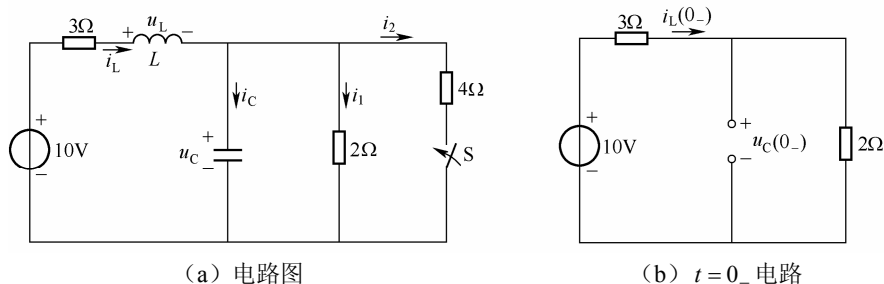


图 5-11 例 5-5 电路

$$u_C(0_-) = 10 \times \frac{2}{3+2} = 4V$$

$$i_L(0_-) = \frac{10}{3+2} = 2A$$

(2) 由换路定理得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 4V$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$

因此, 在 $t=0_+$ 瞬间, 电容元件相当于一个 4V 的电压源, 电感元件相当于一个 2A 的电流源。据此画出 $t=0_+$ 时刻的等效电路, 如图 5-11 (c) 所示。

(3) 在 $t=0_+$ 电路中, 应用直流电阻电路的分析方法, 可求出电路中其他电流、电压的初始值, 即

$$i_1(0_+) = \frac{4}{2} = 2A$$

$$i_2(0_+) = \frac{4}{4} = 1A$$

$$i_C(0_+) = 2 - 2 - 1 = -1A$$

$$u_L(0_+) = 10 - 3 \times 2 - 4 = 0$$

【例 5-6】 电路如图 5-12 (a) 所示, 开关 S 闭合前电路无储能, 开关 S 在 $t=0$ 时闭合, 试求 i_1 、 i_2 、 i_3 、 u_C 、 u_L 的初始值。

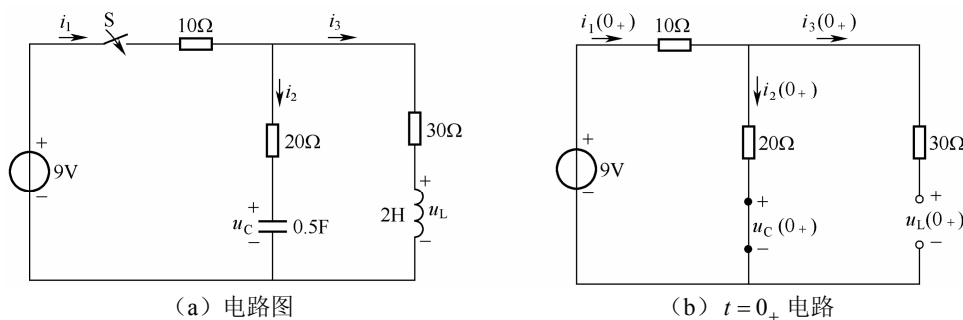


图 5-12 例 5-6 电路

解：（1）由题意知

$$\begin{aligned} u_c(0_-) &= 0 \\ i_3(0_-) &= i_L(0_-) = 0 \end{aligned}$$

（2）由换路定理得

$$\begin{aligned} u_c(0_+) &= u_c(0_-) = 0 \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) = 0 \end{aligned}$$

因此，在 $t=0_+$ 电路中，电容应该用短路线代替，电感以开路代替，得到 $t=0_+$ 电路，如图 5-12（b）所示。

（3）在 $t=0_+$ 电路中，应用直流电阻电路的分析方法求得

$$\begin{aligned} i_1(0_+) &= i_2(0_+) = \frac{9}{10+20} = 0.3\text{A} \\ u_L(0_+) &= 20i_2(0_+) = 20 \times 0.3 = 6\text{V} \end{aligned}$$

通过上述例题，可以归纳出求初始值的一般步骤如下：

- （1）根据 $t=0_-$ 时的等效电路，求出 $u_c(0_-)$ 及 $i_L(0_-)$ 。
- （2）作出 $t=0_+$ 时的等效电路，并在图上标出各待求量（若激励是时间函数，则取 $t=0$ 时的值）。
- （3）由 $t=0_+$ 等效电路，求出各待求量的初始值。

思考与练习

5-5 在动态电路分析中，电容元件时而看作开路，时而看作短路，时而看作电压源；电感元件时而看作短路，时而看作开路，时而看作电流源。试问这些处理方法各适用于什么情况？

5-6 图 5-13 所示的电路在 $t < 0$ 时开关打开，电路已处于稳态。当 $t = 0$ 时，开关闭合。求 i_1 、 i_2 和 i_c 的初始值。

5-7 图 5-14 所示的电路在 $t = 0$ 时，开关由 1 扳向 2，在 $t < 0$ 时电路已处于稳态，求初始值 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

5-8 图 5-15 所示的电路在 $t = 0$ 时开关打开， $t < 0$ 时电路已达稳态。求 i_c 、 i_L 、 u_c 、 u_L 的初始值。

5-9 图 5-16 所示的电路在 $t < 0$ 时 S_1 打开， S_2 闭合，电路已达稳态。 $t = 0$ 时， S_1 闭合， S_2 打开。求初始值 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

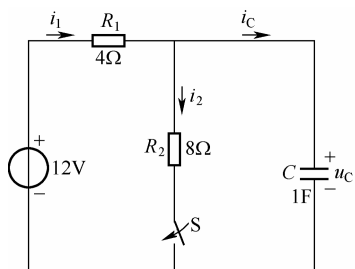


图 5-13 练习题 5-6 电路

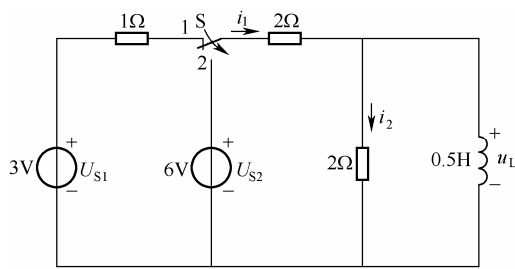


图 5-14 练习题 5-7 电路

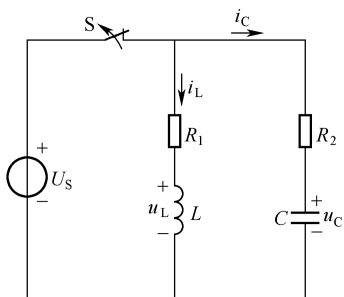


图 5-15 练习题 5-8 电路

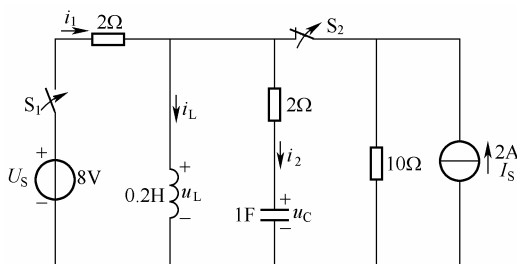


图 5-16 练习题 5-9 电路

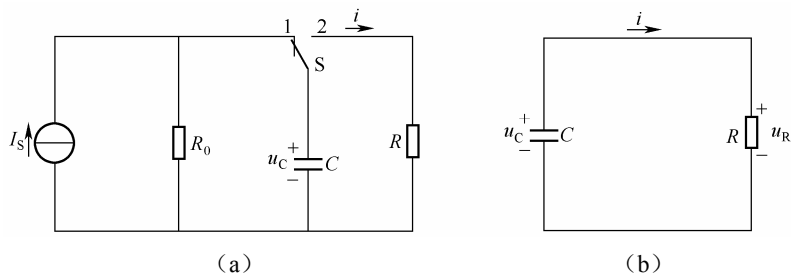
5.3 零输入响应

对于电阻电路，响应只能由电源（激励）引起，而对动态电路，电源以及电容、电感的初始储能均能作为激励而在电路中引起响应。

含有一个储能元件（电容或电感）的电路称为一阶电路。在一阶电路中，若输入激励信号为零，仅由储能元件的初始储能所激发的响应，称为零输入响应。下面分别讨论由电阻和电容构成的 RC 电路以及由电阻和电感构成的 RL 电路的零输入响应。

5.3.1 RC 电路的零输入响应

在图 5-17 (a) 所示的电路中，当 $t < 0$ 时开关 S 处于位置 1，电容 C 被电流源充电，电路已处于稳态，电容电压 $u_c(0_-) = R_0 I_s$ 。 $t = 0$ 时，开关扳向位置 2，这样在 $t \geq 0$ 时，电容 C 将对 R 放电，如图 5-17 (b) 所示，电路中形成电流 i 。 $t > 0$ 后，电路中无电源作用，电路的响应均是由电容的初始储能而产生，故属于 RC 电路的零输入响应。

图 5-17 RC 电路的零输入响应

在换路瞬间，电容电压不会突变，由换路定理可得 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = R_0 I_s$ ，电流 $i(0_+) = u_c(0_+)/R = R_0 I_s/R$ 。随着时间的推移，电容的储能逐渐被电阻所消耗，所以电容电压和放电电流都会逐渐减小，最后降至零，电路又达到新的稳定状态。

换路后由图 5-17 (b) 可知，根据 KVL 有

$$-u_R + u_c = 0$$

而 $u_R = iR$ ， $i = -C \frac{du_c}{dt}$ ，代入上式可得

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (5-14)$$

式 (5-14) 是一阶常系数齐次微分方程，其通解形式为

$$u_c = A e^{pt} \quad t \geq 0 \quad (5-15)$$

式中， A 为待定的积分常数，可由初始条件确定； p 为式 (5-14) 所对应的特征方程的根。将式 (5-15) 代入式 (5-14) 可得特征方程为

$$RCp + 1 = 0$$

从而解出特征根为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

则通解

$$u_c = A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5-16)$$

将初始条件 $u_c(0_+) = R_0 I_s$ 代入上式，求出积分常数 A 为

$$u_c(0_+) = A = R_0 I_s$$

将 $u_c(0_+)$ 代入式 (5-16)，得到满足初始值的微分方程的通解为

$$u_c = u_c(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} = R_0 I_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (5-17)$$

放电电流为

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{R_0 I_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (5-18)$$

令 $\tau = RC$ ，它具有时间的量纲，即

$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{\text{伏特}}{\text{安培}} \times \frac{\text{库仑}}{\text{伏特}} \right] = \left[\frac{\text{库仑}}{\text{库仑/秒}} \right] = [\text{秒}]$$

故称 τ 为时间常数，这样式 (5-17) 与式 (5-18) 可分别写为

$$u_c = u_c(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-19)$$

$$i = i(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-20)$$

画出 u_c 及 i 的波形如图 5-18 所示。

由于 $p = -\frac{1}{RC}$ 为负值，故 u_c 和 i 均按指数规律衰减，它们的最大值分别为初始值

$u_c(0_+) = R_0 I_s$ 及 $i(0_+) = \frac{R_0 I_s}{R}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, u_c 和 i 衰减到零。

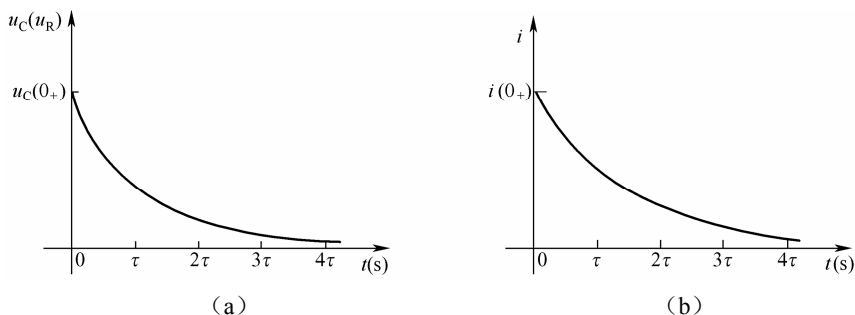


图 5-18 RC 电路零输入响应 u_c 及 i 的波形

从以上过程可知, 在 $t < 0$ 时, 电路处于稳定状态, 电容被充电, 其电压达到 $u(0_-) = R_0 I_s$, 电路换路后, 电容电压由 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = R_0 I_s$ 逐渐下降到零, 这一过程称为过渡过程或暂态过程。当 $t \rightarrow \infty$, 过渡过程结束, 电路又达到新的稳定状态。

在一阶电路中, τ 是一个重要参数, τ 的大小决定了电压、电流衰减的快慢程度。 τ 越大, 电压、电流衰减越慢; 反之, τ 越小, 电压、电流衰减越快。由式 (5-19) 可知, 当 $t = \tau$ 时, 有

$$u_c(\tau) = u_c(0_+)e^{-1} = 0.368u_c(0_+)$$

即 u_c 下降到初始值的 36.8%。

当 $t = 4\tau$ 时, 有

$$u_c(4\tau) = u_c(0_+)e^{-4} = 0.0184u_c(0_+)$$

即 u_c 已降到初始值的 1.84%, 可以认为响应已衰减完毕。

5.3.2 RL 电路的零输入响应

图 5-19 (a) 所示的电路中, $t = 0_-$ 时开关 S 闭合, 电路已达稳态, 电感 L 相当于短路, 流过 L 的电流为 I_0 , 即 $i_L(0_-) = I_0$, 故电感储存了磁能。在 $t = 0$ 时开关 S 打开, 所以在 $t \geq 0$ 时, 电感 L 储存的磁能将通过电阻 R 释放, 在电路中产生电流和电压, 如图 5-19 (b) 所示。由于 $t > 0$ 后, 换路后回路中的电流及电压均是由电感 L 的初始储能产生的, 所以为 RL 电路的零输入响应。

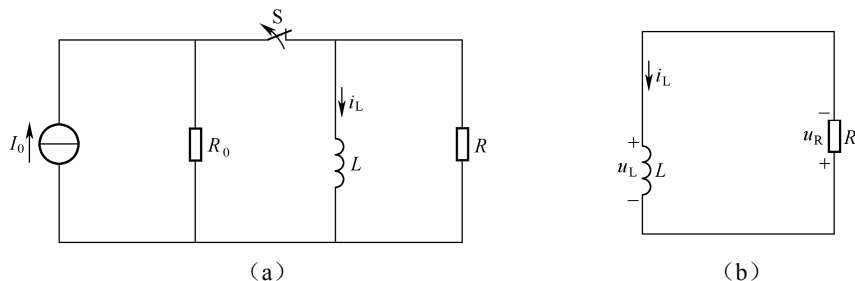


图 5-19 RL 电路的零输入响应

由图 5-19 (b), 根据 KVL 有

$$u_L + u_R = 0$$

将 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 及 $u_R = Ri_L$ 代入上式得

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (5-21)$$

上式为一阶常系数齐次微分方程, 其通解形式为

$$i_L = Ae^{pt} \quad t \geq 0 \quad (5-22)$$

将式 (5-22) 代入式 (5-21), 得特征方程为

$$Lp + R = 0$$

故特征根为

$$p = -\frac{R}{L}$$

则通解为

$$i_L = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$$

若令 $\tau = \frac{L}{R}$, τ 是 RL 电路的时间常数, 仍具有时间量纲, 则上式可写为

$$i_L = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-23)$$

将初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ 代入上式, 求出积分常数 A 为

$$i_L(0_+) = A = I_0$$

这样, 得到满足初始条件的微分方程的通解为

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-24)$$

电阻及电感的电压分别是

$$u_R = Ri_L = RI_0e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-25)$$

$$u_L = -u_R = -RI_0e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-26)$$

分别作出 i_L 、 u_R 和 u_L 的波形如图 5-20 所示。

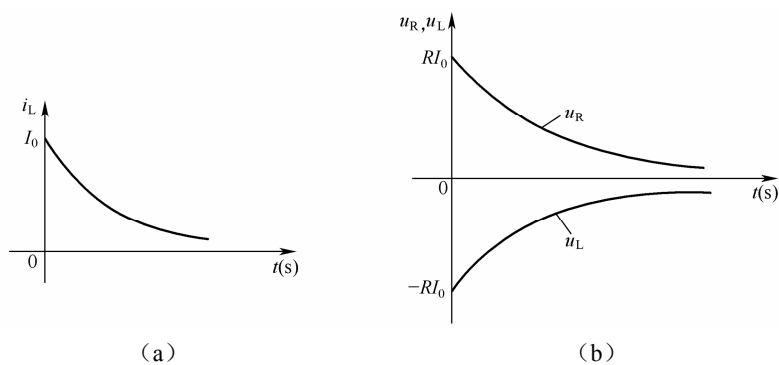


图 5-20 RL 电路零输入响应 i_L 、 u_R 和 u_L 的波形

由图 5-20 可知, i_L 、 u_R 及 u_L 的初始值 (亦是最大值) 分别为 $i_L(0_+) = I_0$, $u_R(0_+) = RI_0$, $u_L(0_+) = -RI_0$, 它们都是从各自的初始值开始, 然后按同一指数规律逐渐衰减到零。衰减的快慢取决于时间常数 τ , 这与一阶 RC 零输入电路情况相同。

将以上求得的 RC 和 RL 电路零输入响应进一步分析可知, 对于任意时间常数为非零有限值的一阶电路, 不仅电容电压、电感电流, 而且所有电压、电流的零输入响应, 都是从它的初始值按指数规律衰减到零的。且同一电路中, 所有的电压、电流的时间常数相同。若用 $f(t)$ 表示零输入响应, 用 $f(0_+)$ 表示其初始值, 则零输入响应可用以下通式表示为

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-27)$$

应该注意的是, RC 电路与 RL 电路的时间常数是不同的, 前者 $\tau = RC$, 后者 $\tau = L/R$ 。

【例 5-7】 如图 5-21 (a) 所示的电路, $t = 0_-$ 时电路已处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 打开。求 $t \geq 0$ 时的电压 u_c 、 u_R 和电流 i_c 。

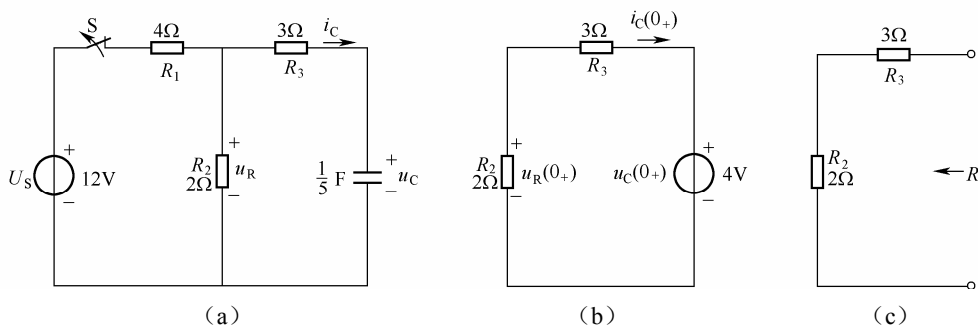


图 5-21 例 5-7 电路

解: 由于在 $t = 0_-$ 时电路已处于稳态, 在直流电源作用下, 电容相当于开路。所以

$$u_c(0_-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s = \frac{2 \times 12}{4 + 2} = 4V$$

由换路定律得 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 4V$

作出 $t = 0_+$ 等效电路如图 5-21 (b) 所示, 电容用 4V 电压源代替, 由图 5-21 可知

$$u_R(0_+) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_c(0_+) = \frac{2 \times 4}{2 + 3} = 1.6V$$

$$i_c(0_+) = -\frac{u_c(0_+)}{R_2 + R_3} = -\frac{4}{2 + 3} = -0.8A$$

换路后从电容两端看进去的等效电阻如图 5-21 (c) 所示, 为

$$R = R_3 + R_2 = 3 + 2 = 5\Omega$$

时间常数为

$$\tau = RC = 5 \times \frac{1}{5} = 1s$$

根据式 (5-27) 计算零输入响应得

$$u_c = u_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 4e^{-t}V \quad t \geq 0$$

$$u_R = u_R(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.6e^{-t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

$$i_c = i_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.8e^{-t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

也可以由

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

求出

$$i_c = -0.8e^{-t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

【例 5-8】如图 5-22 (a) 所示的电路, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L = 0.1\text{H}$, $U_s = 10\text{V}$ 。 $t = 0_-$ 时电路已达稳态。 $t = 0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的 i_L 、 u_L 和 u_{R_2} 。

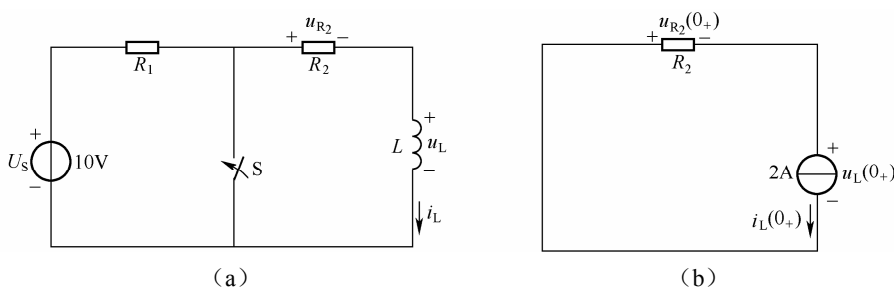


图 5-22 例 5-8 电路

解: 由于 $t = 0_-$ 时电路已达稳态, 在直流电源作用下, 电感相当于短路。所以

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2 + 3} = 2\text{A}$$

由换路定律得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$$

作出 $t = 0_+$ 等效电路如图 5-22 (b) 所示, 电感 L 用 2A 电流源代替, 由图 (b) 可知

$$u_{R_2}(0_+) = R_2 i_L(0_+) = 3 \times 2 = 6\text{V}$$

由 KVL 有

$$u_L(0_+) = -u_{R_2}(0_+) = -6\text{V}$$

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{0.1}{3} = \frac{1}{30}\text{S}$$

所以

$$i_L = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2e^{-30t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

$$u_L = u_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -6e^{-30t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

$$u_{R_2} = u_{R_2}(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-30t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

思考与练习

5-10 在 RL 电路中, $\tau = L/R$ 。试从能量角度说明为什么 τ 与 L 成正比而与 R 成反比?

5-11 图 5-23 所示的电路, $t = 0_-$ 时电路已处于稳态, $t = 0$ 时开关 S 打开, 求 $t \geq 0$ 时电

压 u_c 和电流 i 。

5-12 图 5-24 所示的电路, $t=0_-$ 时电路已处于稳态, $t=0$ 时开关 S 打开, 求 $t \geq 0$ 时的电压 u 及电路 i_L 。

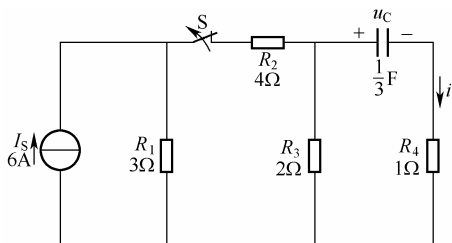


图 5-23 练习题 5-11 电路

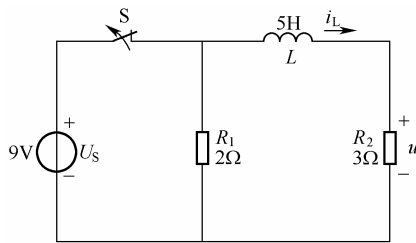


图 5-24 练习题 5-12 电路

5.4 零状态响应

在激励作用之前, 电路的初始储能为零, 仅由激励引起的响应称为零状态响应。

工程实际中, 激励函数多种多样, 而以常量激励最为简单和多见。本节讨论激励为常量的零状态响应。

5.4.1 RC 电路的零状态响应

在图 5-25 (a) 所示的 RC 电路中, 电容先未充电。 $t=0$ 时开关 S 闭合, RC 电路与激励 U_s (常量) 接通, 试确定 S 闭合后电路中的响应。

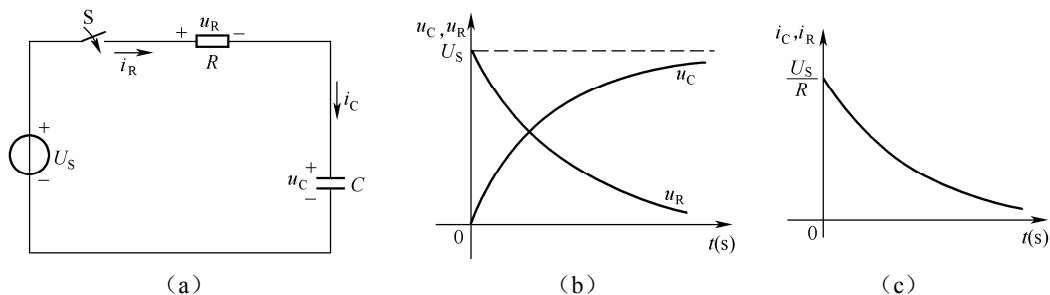


图 5-25 RC 电路的零状态响应

在 S 闭合瞬间, 电容电压不会跃变, 由换路定律 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$, $t=0_-$ 时电容相当于短路, $u_R(0_+) = U_s$, 故 $i_R(0_+) = \frac{u_R(0_+)}{R} = \frac{U_s}{R}$, 电容开始充电。随着时间的推移, u_c 将逐渐升高, u_R 则逐渐降低, i_R (等于 i_c) 逐渐减小。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到稳态, 这时电容相当于开路, 充电电流 $i_c(\infty) = 0$, $u_R(\infty) = 0$, $u_c(\infty) = U_s$ 。

由 KVL 得

$$u_R + u_c = U_s$$

而 $u_R = Ri_R = Ri_c = RC \frac{du_c}{dt}$, 代入上式可以得到以 u_c 为变量的微分方程

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s \quad t \geq 0 \quad (5-28)$$

初始条件为 $u_c(0_+) = 0$

式(5-28)为一阶常系数非齐次微分方程,其解由两部分组成:一部分是它相应的齐次微分方程的通解 u_{ch} ,也称为齐次解;另一部分是该非齐次微分方程的特解 u_{cp} ,即

$$u_c = u_{ch} + u_{cp}$$

由于式(5-28)相应的齐次微分方程与 RC 零输入响应式(5-14)完全相同,因此其通解应为

$$u_{ch} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

式中, A 为积分常数。特解 u_{cp} 取决于激励函数,当激励为常量时特解也为常量,可以设 $u_{cp} = K$,代入式(5-28)得

$$u_{cp} = K = U_s$$

式(5-28)的解(完全解)为

$$u_c = u_{ch} + u_{cp} = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U_s$$

将初始条件 $u_c(0_+) = 0$ 代入上式,得出积分常数 $A = -U_s$,所以

$$u_c = -U_s e^{-\frac{t}{RC}} + U_s = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

由于稳态值 $u_c(\infty) = U_s$,故上式可以写成

$$u_c = u_c(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0 \quad (5-29)$$

由式(5-29)可知,当 $t = 0$ 时, $u_c(0) = 0$;当 $t = \tau$ 时, $u_c(\tau) = U_s(1 - e^{-1}) = 63.2\% U_s$,即在零状态响应中,电容电压上升到稳态值 $u_c(\infty) = U_s$ 的63.2%所需的时间是 τ ;而当 t 为 $4\tau \sim 5\tau$ 时, u_c 上升到其稳态值 U_s 的98.17%~99.3%,一般认为充电过程即告结束。

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

$$i_R = i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

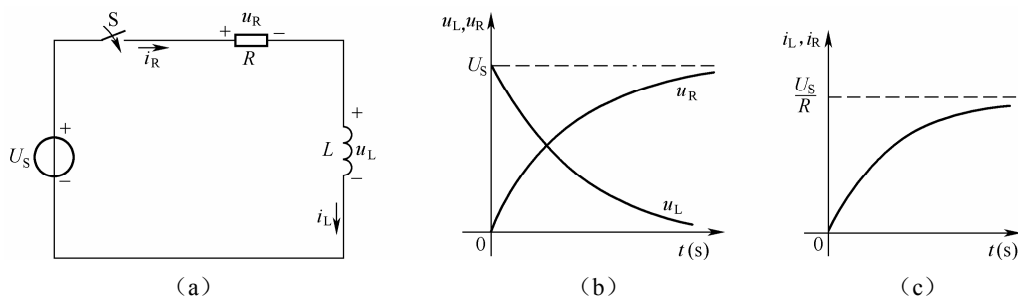
$$u_R = Ri_R = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

根据 u_c 、 i_c 及 u_R 的表达式,画出它们的波形如图5-25(b)、(c)所示,其变化规律与前面叙述的物理过程一致。

5.4.2 RL电路的零状态响应

对于图5-26(a)所示的一阶 RL 电路, U_s 为直流电压源, $t < 0$ 时,电感 L 中的电流为零。 $t = 0$ 时开关 S 闭合,电路与激励 U_s 接通,在 S 闭合瞬间,电感电流不会跃变,即有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$,选择 i_L 为首先求解的变量,由KVL有

$$u_L + u_R = U_s$$

图 5-26 一阶 RL 电路的零状态响应

将 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $u_R = Ri_L$ 代入上式, 可得

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_s \quad t \geq 0 \quad (5-30)$$

初始条件为 $i_L(0_+) = 0$

式 (5-30) 也是一阶常系数非齐次微分方程, 其解同样由齐次方程的通解 i_{Lh} 和非齐次方程的特解 i_{Lp} 两部分组成, 即

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp}$$

由于式 (5-30) 相应的齐次方程与描述 RL 电路零输入响应的式 (5-21) 相同, 因此, 其齐次方程的通解也应为

$$i_{Lh} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

式中, 时间常数 $\tau = L/R$, 与电路激励无关。

非齐次方程的特解与激励的形式有关, 由于激励为直流电压源, 故特解 i_{Lp} 为常量, 令 $i_{Lp} = K$, 代入式 (5-30) 得

$$i_{Lp} = K = \frac{U_s}{R}$$

因此式 (5-30) 的完全解为

$$i_L = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_s}{R}$$

代入 $t=0$ 时的初始条件 $i_L(0_+) = 0$ 得

$$A = -\frac{U_s}{R}$$

于是
$$i_L = -\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_s}{R} = \frac{U_s}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

由于 i_L 的稳态值 $i_L(\infty) = \frac{U_s}{R}$, 故上式可以写成

$$i_L = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0 \quad (5-31)$$

电路中的其他响应分别为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

$$i_R = i_L = \frac{U_s}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$u_R = Ri_R = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

它们的波形如图 5-26 (b)、(c) 所示。

其物理过程是：S 闭合后， i_L (i_R) 从初始值零逐渐上升， u_L 从初始值 $u_L(0_+) = U_s$ 逐渐下降，而 u_R 从 $u_R(0_+) = 0$ 逐渐上升，当 $t = \infty$ ，电路达到稳态，这时 L 相当于短路， $i_L(\infty) = U_s/R$ ， $u_L(\infty) = 0$ ， $u_R(\infty) = U_s$ 。从波形图上可以直观地看出各响应的变化规律。

5.4.3 单位阶跃响应

单位阶跃函数用 $\varepsilon(t)$ 表示，其定义如下

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (5-32)$$

$\varepsilon(t)$ 的波形如图 5-27 (a) 所示，它在 $(0_+, 0_-)$ 时域内发生了单位阶跃，至于它在 $t = 0$ 时取什么值（例如取 1、1/2 或 0）是无关紧要的。

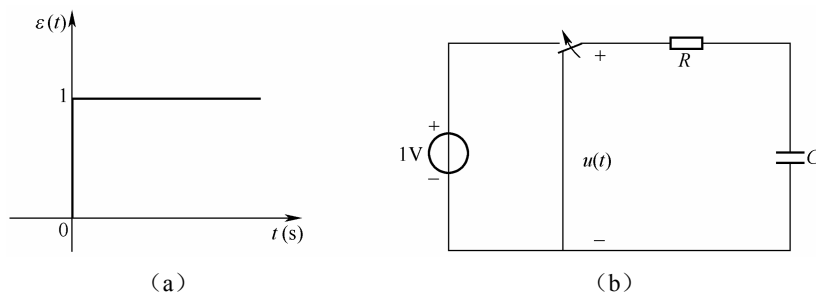


图 5-27 单位阶跃响应

单位阶跃函数可以用来描述图 5-27 (b) 所示的开关动作，它表示在 $t = 0$ 时把电路接入 1V 直流源时 $u(t)$ 的值，即

$$u(t) = \varepsilon(t) \text{ V}$$

如果在 $t = t_0$ 时发生跳变，这相当于单位直流源接入电路的时间推迟到 $t = t_0$ ，其波形如图 5-28 所示，它是延迟的单位阶跃函数，可表示为

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{0-} \\ 1 & t \geq t_{0+} \end{cases} \quad (5-33)$$

当激励为单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 时，电路的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。对于图 5-25 所示电路的单位阶跃响应，只要令 $U_s = \varepsilon(t)$ 就能得到，例如电容电压为

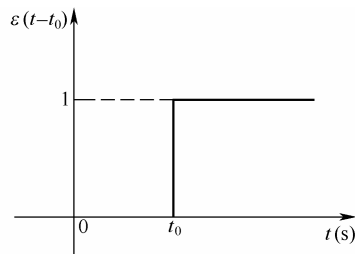


图 5-28 延迟的单位阶跃函数

$$u_c = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \varepsilon(t)$$

如果单位阶跃不是在 $t=0$ 而是在某一时刻 t_0 时加上的, 则只要把上述表达式中的 t 改为 $t-t_0$ 就行了。即这种情况下的 u_c 为

$$u_c = (1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}) \varepsilon(t-t_0)$$

若图 5-25 的激励 $u_s = K\varepsilon(t)$ (K 为任意常数), 则根据线性电路的性质, 电路中的零状态响应均应扩大 K 倍, 对于电容有

$$u_c = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \varepsilon(t)$$

【例 5-9】求图 5-29 (a) 所示电路的阶跃响应 u_c 。

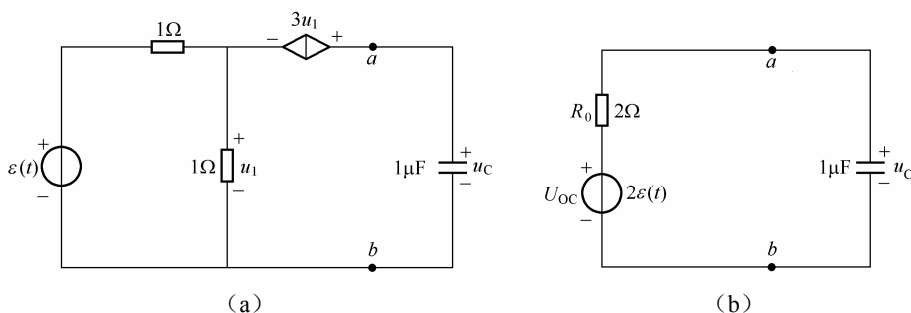


图 5-29 例 5-9 电路

解: 先将电路 ab 左端的部分用戴维南定理化简, 得到图 5-29 (b) 所示的电路。由图 (a) 可得

$$U_{oc} = 3u_1 + u_1 = 4u_1 = 4 \times \frac{1}{2} \varepsilon(t) = 2\varepsilon(t)$$

将 ab 端短路, 设短路电流为 I_{sc} (从 a 流向 b)

因为 $3u_1 + u_1 = 0$

所以 $u_1 = 0$

则 $I_{sc} = \frac{\varepsilon(t)}{1} = 1A$

$$R_0 = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{2}{1} = 2\Omega$$

于是 $u_c = U_{oc} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \varepsilon(t)$

式中 $\tau = R_0 C = 2 \times 10^{-6} s$

思考与练习

5-13 在 RC 零状态响应电路中, 电容充电的速度与激励的大小有关, 这句话对吗?

5-14 试简述 RL 零状态响应电路所发生的物理过程。

5-15 对图 5-30 所示的电路, $t < 0$ 时电路处于稳态。 $t = 0$ 时开关 S 由 1 扳向 2。求 $t \geq 0$ 时电压 u_c 和电流 i 。

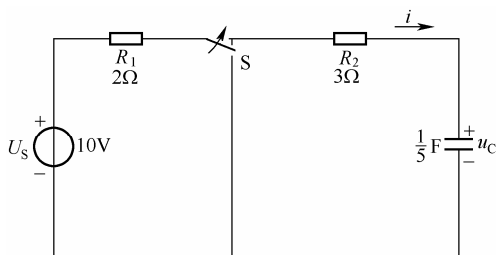


图 5-30 练习 5-15 电路

5-16 对图 5-31 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 闭合。已知 $i_L(0_-) = 0$, 求 $t \geq 0$ 时的电流 i_L 和电压 u_L 。

5-17 求图 5-32 所示电路的阶跃响应 u_c 。

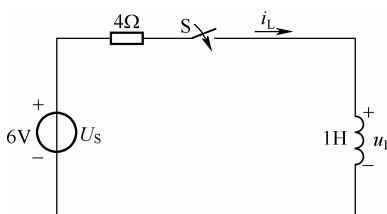


图 5-31 练习 5-16 电路

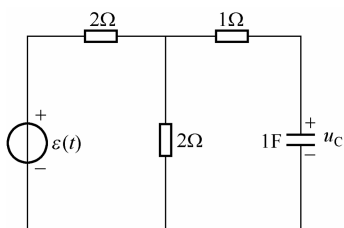


图 5-32 练习 5-17 电路

5.5 全响应

由电路的初始状态和外加输入共同激励所产生的响应, 称为全响应。

在图 5-33 所示的电路中, 设 $u_c(0_-) = U_0$, 开关 S 在 $t = 0$ 时闭合, 电路与常量输入 U_s 接通, 显然电路中的响应属于全响应。

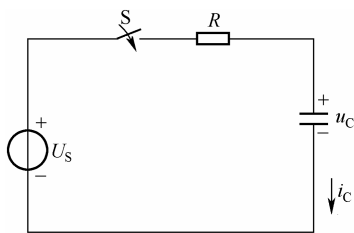


图 5-33 RC 电路的全响应

对 $t \geq 0$ 的电路, 以 u_c 为求解变量可列出描述电路的微分方程为

$$\begin{cases} RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s \\ u_c(0_+) = U_0 \end{cases} \quad (5-34)$$

式(5-34)与描述零状态电路的微分方程式(5-28)相比,仅只有初始条件不同,因此,其解答必具有类似的形式,即

$$u_c = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + U_s$$

代入初始条件 $u_c(0_+) = U_0$ 得

$$K = U_0 - U_s$$

$$\text{从而得到} \quad u_c = (U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s \quad (5-35)$$

通过分析式(5-34)可知,当 $U_s = 0$ 时,即为 RC 零输入电路的微分方程。而当 $U_0 = 0$ 时,即为 RC 零状态电路的微分方程。这一结果表明,零输入响应和零状态响应都是全响应的一种特殊情况。

式(5-35)的全响应公式可以有以下两种分解方式:

(1) 全响应分解为暂态响应和稳态响应之和。以式(5-35)为例来说明这种分解方式。

式中第一项 $(U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}}$ 是按指数规律衰减的,称暂态响应或称自由分量(固有分量)。式中第二项 $U_s = u_c(\infty)$ 受输入的制约,它是非齐次方程的特解,其解的形式一般与输入信号形式相同,称稳态响应或强制分量。这样有

$$\text{全响应} = \text{暂态响应} + \text{稳态响应}$$

(2) 全响应分解为零输入响应和零状态响应之和。将式(5-35)改写后可得

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5-36)$$

式(5-36)等号右边第一项为零输入响应,第二项为零状态响应。

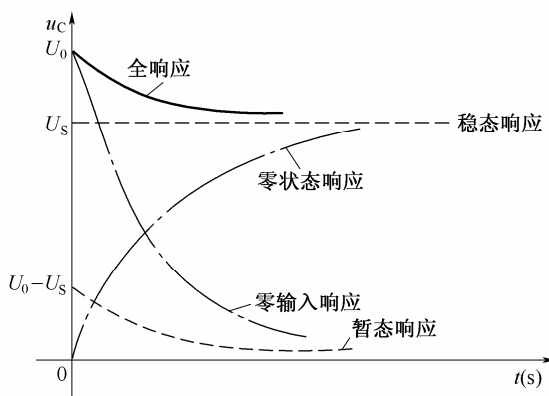


图 5-34 RC 电路全响应 u_c 波形图(设 $U_0 > U_s$)

因为电路的激励有两种:一是外加的输入信号;二是储能元件的初始储能,根据线性电路的叠加性,电路的响应是两种激励各自所产生响应的叠加,即

$$\text{全响应} = \text{零输入响应} + \text{零状态响应}$$

总之,无论是把全响应分解为暂态响应与稳态响应之和,还是分解为零输入响应与零状态响应之和,这都是人为地为了分析方便作的分解。两种分解方式的着眼点不同,分解为暂态响应与稳态响应是着眼于电路的工作状态;分解为零输入响应与零状态响应则着眼于电路的因

果关系，而电路真实显现出来的只是全响应。

u_c 的全响应曲线如图 5-34 所示。从图中可见，按零输入响应与零状态响应相加或按暂态响应与稳态响应相加，所得的全响应是一致的。

思考与练习

5-18 某 RC 电路中，电容电压的全响应表示为零输入响应与零状态响应之和，即

$$u_c(t) = 5e^{-t} + 20(1 - e^{-t})V \quad t \geq 0$$

请写出 $u_c(t)$ 的稳态响应、暂态响应，并画出各响应的波形。

5.6 求解一阶电路的三要素法

从求解一阶电路的响应中可以归纳出：在恒定直流电源输入、非零初始状态激励下的一阶电路，各处的电流、电压都是从初始值开始，按指数规律逐渐增长或逐渐衰减到稳定值的，而且在同一电路中，各支路电流、电压变化的时间常数 τ 都是相同的。因此，在上述一阶电路中，任一电流或电压都是由初始值、稳态值及时间常数这三个参数确定的。若用 $f(t)$ 表示电路的响应（电流或电压），用 $f(0_+)$ 表示该电流或电压的初始值， $f(\infty)$ 表示相应的稳态值， τ 表示电路的时间常数，则电路的响应可表示为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad (5-37)$$

式（5-37）即为一阶电路在直流电源作用下求解 $t > 0$ 时任一电流、电压响应的三要素公式，式中 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 称为三要素，把按三要素公式求解响应的方法称为三要素法。

由于零输入响应和零状态响应是全响应的特殊情况，因此，式（5-37）适用于求一阶电路的任一种响应，具有普遍适用性。

综上所述，为求电路的响应，只需要求出 $f(0_+)$ 、 $f(\infty)$ 和 τ 这三个量，代入式（5-37）即可。用三要素法求解直流电源激励下一阶电路的响应，其解题步骤如下：

1. 确定初始值

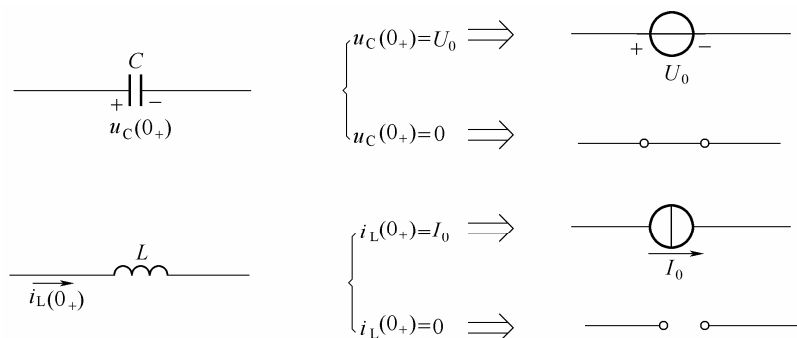
初始值 $f(0_+)$ 是指任一响应在换路后瞬间 $t = 0_+$ 时的数值，与 5.2.2 节所讲的初始值的确定方法是一样的。

（1）先作 $t = 0_-$ 电路。确定换路前电路的状态 $u_c(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$ ，这个状态即为 $t < 0$ 阶段的稳定状态，因此，此时电路中电容 C 视为开路，电感 L 用短路线代替。

（2）作 $t = 0_+$ 电路。这是用刚换路后一瞬间的电路确定各变量的初始值。若 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$ ， $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ ，在此电路中 C 用电压源 U_0 代替， L 用电流源 I_0 代替。若 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$ 或 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ，则 C 用短路线代替， L 视为开路。可用图 5-35 说明。作 $t = 0_+$ 电路后，即可按一般电阻性电路来求解各变量的 $u(0_+)$ 、 $i(0_+)$ 。

2. 确定稳态值 $f(\infty)$

作 $t = \infty$ 电路。瞬态过程结束后，电路进入了新的稳态，用此时的电路确定各变量稳态值 $u(\infty)$ 、 $i(\infty)$ 。在此电路中，电容 C 视为开路，电感 L 用短路线代替，可按一般电阻性电路来求各变量的稳态值。

图 5-35 C 、 L 元件在 $t=0_+$ 时的电路模型3. 求时间常数 τ

RC 电路中, $\tau = RC$; RL 电路中, $\tau = L/R$ 。其中, R 是将电路中所有独立源置零后, 从 C 或 L 两端看进去的等效电阻 (即戴维南等效源中的 R_s)。

【例 5-10】 图 5-36 (a) 所示的电路中, $t=0$ 时将 S 合上, 求 $t \geq 0$ 时的 i_1 、 i_L 、 u_L 。

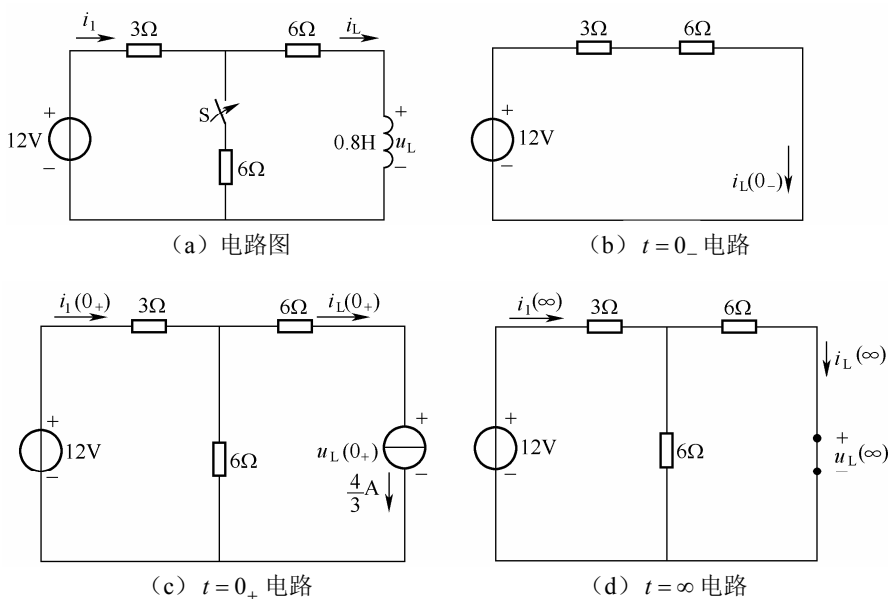


图 5-36 例 5-10 电路

解: (1) 先求 $i_L(0_-)$ 。作 $t=0_-$ 电路, 如图 5-10 (b) 所示, 电感用短路线代替, 则

$$i_L(0_-) = \frac{12}{3+6} = \frac{4}{3} \text{ A}$$

(2) 求 $f(0_+)$ 。作 $t=0_+$ 电路, 如图 5-36 (c) 所示, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{4}{3} \text{ A}$, 图中电感用 $\frac{4}{3} \text{ A}$ 的电流源代替, 流向与图 5-36 (b) 中 $i_L(0_-)$ 一致。因为题意要求 i_1 、 i_L 、 u_L , 所以相应地需要先求 $i_1(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 。据 KVL, 图 5-36 (c) 左边回路中有

$$3i_1(0_+) + 6[i_1(0_+) - i_L(0_+)] = 12$$

得
$$i_1(0_+) = \frac{20}{9} \text{ A}$$

图 5-36 (c) 右边回路中有

$$u_L(0_+) = -6i_L(0_+) + 6[i_1(0_+) - i_L(0_+)] = -\frac{8}{3} \text{ V}$$

(3) 求 $f(\infty)$ 。作 $t = \infty$ 电路, 如图 5-36 (d) 所示, 电感用短路线代替, 则

$$i_1(\infty) = \frac{12}{3 + \frac{6 \times 6}{6 + 6}} = 2 \text{ A}$$

$$i_L(\infty) = \frac{1}{2} i_1(\infty) = 1 \text{ A}$$

$$u_L(\infty) = 0$$

(4) 求 τ 。从动态元件 L 两端看进去的戴维南等效电阻为

$$R = 6 + 3 // 6 = 6 + \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 8 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.8}{8} = 0.1 = \frac{1}{10} \text{ s}$$

(5) 代入公式。

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_1(t) = 2 + \left(\frac{20}{9} - 2\right)e^{-10t} = 2 + \frac{2}{9}e^{-10t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

$$i_L(t) = 1 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)e^{-10t} = 1 + \frac{1}{3}e^{-10t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = 0 + \left(-\frac{8}{3} - 0\right)e^{-10t} = -\frac{8}{3}e^{-10t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

$i_1(t)$ 、 $i_L(t)$ 及 $u_L(t)$ 波形图如图 5-37 所示。

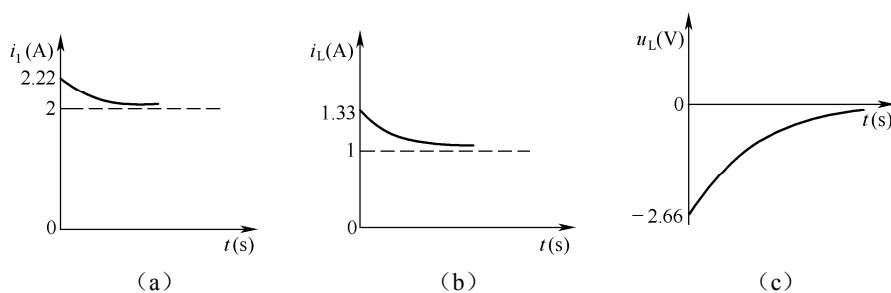


图 5-37 例 5-10 的 $i_1(t)$ 、 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 波形图

【例 5-11】 电路如图 5-38 (a) 所示, 已知 $i_L(0_-) = 6 \text{ A}$, 试求 $t > 0$ 时的 $u_L(t)$, 并定性画出 $u_L(t)$ 的波形。

解: 已知 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 6 \text{ A}$ 。因为无外加激励, 即求解的为零输入响应, 所以 $i_L(\infty) = 0$ 。为求时间常数 τ , 用外加电压法求从 L 两端看进去的 R , 如图 5-38 (b) 所示, 利用 KCL、

KVL 可列方程为

$$U = 6I + (I + 0.1U) \times 4$$

$$U - 0.4U = 10I$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10}{0.6} = \frac{50}{3} \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{\frac{50}{3}} = 0.03\text{s} = \frac{3}{100}\text{s}$$

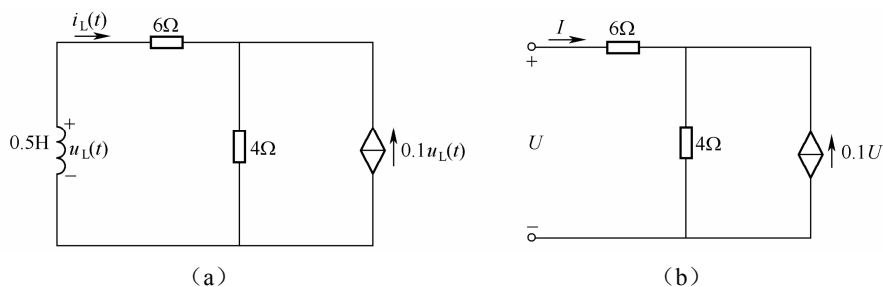


图 5-38 例 5-11 电路

所以
$$i_L(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 6e^{-\frac{100}{3}t} \text{ A} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = -L \frac{di_L(t)}{dt} = 100e^{-\frac{100}{3}t} \text{ V} \quad t \geq 0$$

$u_L(t)$ 的波形如图 5-39 所示。

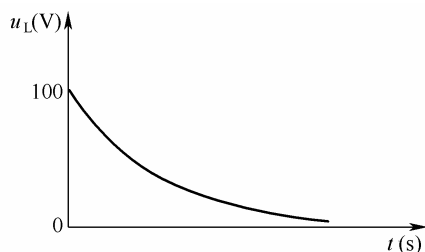


图 5-39 例 5-11 的 $u_L(t)$ 波形图

思考与练习

5-19 有人认为：“用三要素法求任一响应，其初始值用 $f(0_+) = f(0_-)$ 都可以”，这句话对吗？为什么？

5-20 在图 5-40 所示的电路中， $t = 0$ 时开关 S 闭合，闭合前电路已处于稳态。求 $t \geq 0$ 时的电容电压 u_c 。

5-21 对图 5-41 所示的电路， $t < 0$ 时电路已达稳态。 $t = 0$ 时开关打开，求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

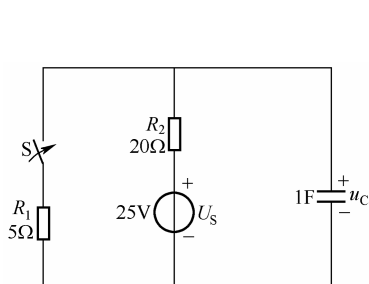


图 5-40 练习题 5-20 电路

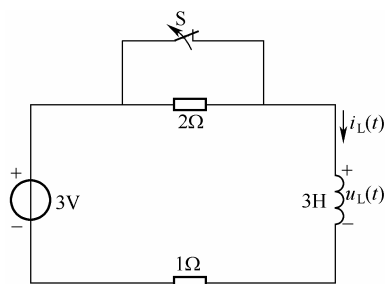


图 5-41 练习题 5-21 电路

小结

本章讲述的是一阶电路的分析，其主要内容归纳为以下几个方面：

(1) 含有动态元件的电路叫动态电路。描述动态电路的方程是微分方程。动态元件的电压和电流关系是微分或积分关系，如表 5-1 所示（设电压和电流为关联参考方向）。

表 5-1 动态元件的伏安关系

伏安关系 元件名称	微分关系	积分关系	储能
电容 C	$i_c = C \frac{du_c}{dt}$	$u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\xi) d\xi$	$w_c = \frac{1}{2} C u_c^2$
电感 L	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\xi) d\xi$	$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2$

(2) 换路定律是指：如果电容电流 i_c 和电感电压 u_L 为有限值，则电容电压 u_c 和电感电流 i_L 不能跃变。设在 $t=0$ 时发生换路，则有

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

而电路中其他电流、电压不存在 $t=0_+$ 与 $t=0_-$ 时值相等的规律性。它们的初始值 $u(0_+)$ 或 $i(0_+)$ 应根据 $t=0_+$ 等效电路求出。

(3) 零输入响应是指输入信号为零，仅由储能元件的初始储能所激发的响应；零状态响应是指电路的初始储能为零，仅由输入产生的响应。当激励为单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 时，电路的零状态响应称阶跃响应。由电路的初始储能和输入共同激励所产生的响应称全响应，它等于零输入响应和零状态响应之和，因为电路的激励有两种：一是输入信号，二是电路的初始储能，根据线性电路的叠加性，电路的全响应是两种激励各自产生响应的叠加。于是全响应也可分解为暂态响应（自由响应）与稳态响应（强迫响应）之和。暂态响应随着时间 t 的增加按指数规律衰减到零，稳态响应与激励具有相同的函数形式，当激励为直流电源时，稳态响应为一常数。

(4) 求解一阶电路响应的三要素公式为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

利用该公式可以方便地求解一阶电路在直流电源或阶跃信号激励下的电路响应。三要素

公式不仅适用于全响应,对零输入、零状态响应均适用,具有普遍适用性。

练习五

5-1 图 5-42 (a) 电路中的 $i_s(t)$ 波形如图 5-42 (b) 所示。(1) 求电压 $u(t)$ 、功率 $p(t)$ 和储能 $w_L(t)$; (2) 求 $t=1.5\text{s}$ 时的功率和储能。

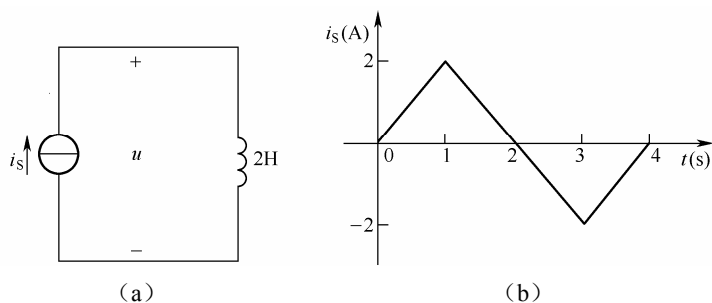


图 5-42 练习题 5-1 图

5-2 图 5-43 所示的电路, $t < 0$ 时电路已稳定, $t = 0$ 时开关由 1 扳向 2, 求 $i_L(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 和 $u_R(0_+)$ 。

5-3 图 5-44 所示的电路, $t = 0$ 时开关闭合。已知 $u_C(0_-) = 4\text{V}$, 求 $i_C(0_+)$ 和 $u_R(0_+)$ 。

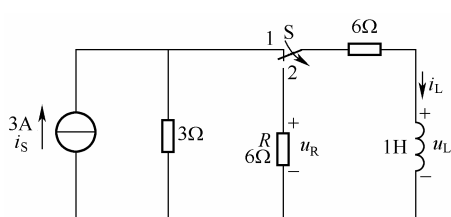


图 5-43 练习题 5-2 电路

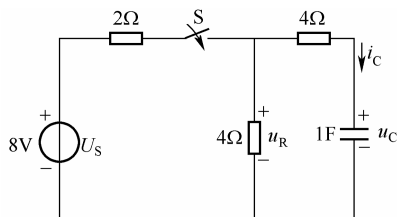


图 5-44 练习题 5-3 电路

5-4 图 5-45 所示的电路, 开关闭合前电路已达稳态。 $t = 0$ 时开关闭合, 求初始值 $i(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

5-5 图 5-46 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 由 1 扳向 2, 在 $t < 0$ 时电路已达稳态, 求初始值 $i(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 和 $u_L(0_+)$ 。

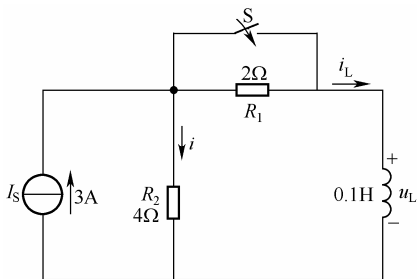


图 5-45 练习题 5-4 电路

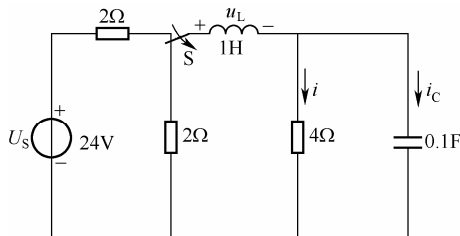


图 5-46 练习题 5-5 电路

5-6 在图 5-47 所示的电路中, 已知 $u_c(0_-) = 10\text{V}$, 求 S 闭合后的时间常数 τ 。

5-7 图 5-48 所示的电路, 开关动作前电路已达稳态, $t = 0$ 时开关 S 由 1 扳向 2, 求 $t \geq 0_+$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

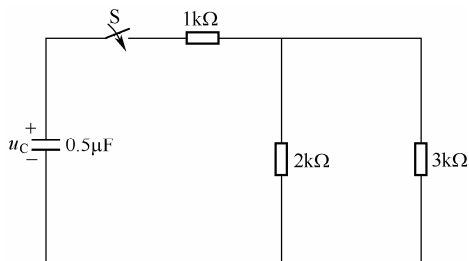


图 5-47 练习题 5-6 电路

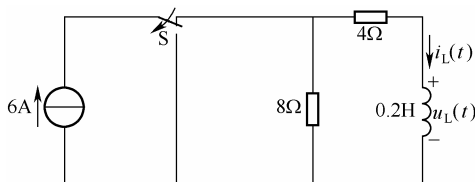


图 5-48 练习题 5-7 电路

5-8 图 5-49 所示的电路, $t = 0$ 时开关闭合, 开关动作前电路已达稳态, 求 $t \geq 0_+$ 时的 $u_c(t)$, 并画出波形。

5-9 图 5-50 所示的电路, $t < 0$ 时开关打开, 电路已达稳态。 $t = 0$ 时开关闭合, 求 $t \geq 0_+$ 时的电流 i_L 和电压 u 。

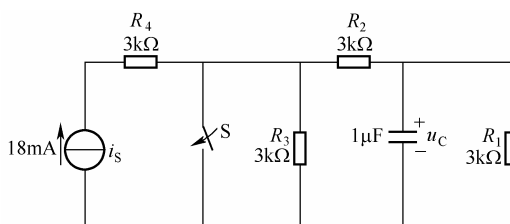


图 5-49 练习题 5-8 电路

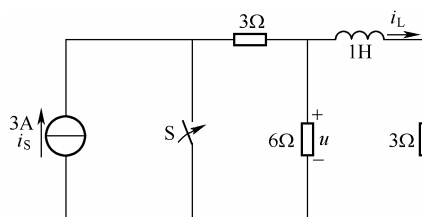


图 5-50 练习题 5-9 电路

5-10 图 5-51 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 打开, 打开前电路已达稳态。求 $t \geq 0_+$ 时的零输入响应 $u(t)$, 并计算经过多长时间 $u(t)$ 的电压等于 0.5V 。

5-11 如图 5-52 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 闭合, 已知 $u_c(0_-) = 0$, 求 $t \geq 0_+$ 时的 $u_c(t)$ 、 $u_0(t)$ 。

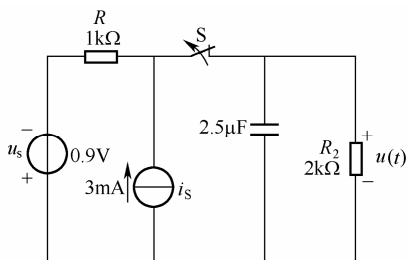


图 5-51 练习题 5-10 电路

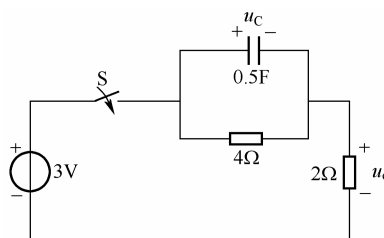


图 5-52 练习题 5-11 电路

5-12 图 5-53 所示的电路, $t = 0$ 时开关闭合, 已知 $i_L(0_+) = 0$, 求 $t \geq 0_+$ 时的电流 i_L 。

5-13 图 5-54 所示的电路, $t < 0$ 时电路已达稳态, $t = 0$ 时开关打开, 求 $t \geq 0_+$ 时的 i_L 、 u_L 和 u 。

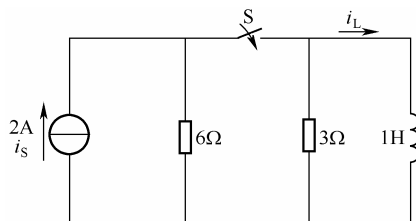


图 5-53 练习题 5-12 电路

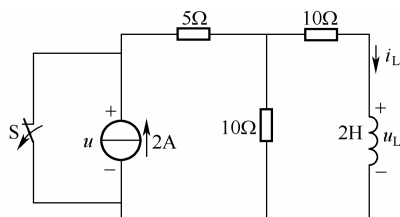


图 5-54 练习题 5-13 电路

5-14 图 5-55 所示的电路，开关闭合前电路已达稳态，求开关闭合后的 u_L 。

5-15 图 5-56 所示的电路， $t=0$ 时开关 S_1 闭合、 S_2 打开， $t<0$ 时电路已达稳态，求 $t\geq 0_+$ 时的 $i(t)$ 和 $u_L(t)$ 。

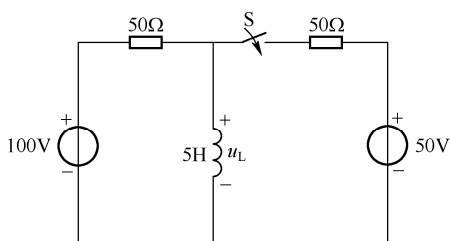


图 5-55 练习题 5-14 电路

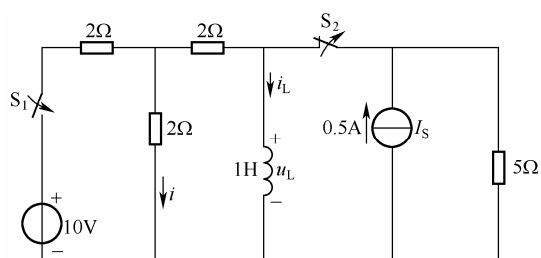


图 5-56 练习题 5-15 电路

5-16 图 5-57 所示的电路，已知 $i_L(0_-)=6\text{A}$ ，试求 $t\geq 0_+$ 时的 $u_L(t)$ ，并定性画出 $u_L(t)$ 的波形。

5-17 图 5-58 所示的电路， $t=0$ 时开关 S_1 闭合、 S_2 打开， $t<0$ 时电路已达稳态，求 $t\geq 0_+$ 时的电流 $i(t)$ 。

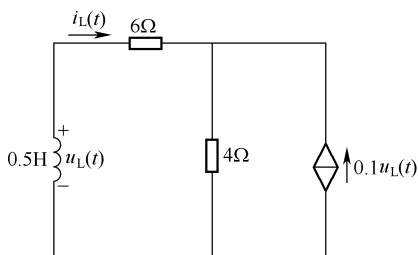


图 5-57 练习题 5-16 电路

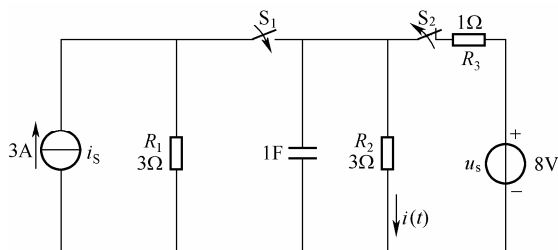


图 5-58 练习题 5-17 电路