习题 3.3

1．研究下列函数在分段点处的连续性：

（1）$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1 \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$　　（2）$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$

2．求函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的连续区间.

3．设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}, & x>0 \\ x^2+2, & x\leqslant 0 \end{cases}$，当 k 为何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？

4．设 $a>0,b>0$，且 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，求 a,b 的值.

5．求下列函数的间断点，并判断间断点的类型：

（1）$f(x)=\begin{cases} x-2, & x\leqslant 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$　　（2）$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 2x+1, & 1\leqslant x<2 \\ 1+x^2, & x\geqslant 2 \end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-x} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$　　（4）$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

6．证明方程 $x^4-2x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

7．证明方程 $\mathrm{e}^x-x=2$ 在 $(0,2)$ 内有一个根.

8．试利用连续函数的介值定理说明：在一金属线材围成的圆圈上，必有一条直径的两端点处的温度是相同的.

3.4　导数的概念

3.4.1　平均变化率

速度这个问题在日常生活中经常遇到．例如，某辆汽车在三个小时内共行驶 180 公里，那么这三个小时内的平均速度是 60 公里/小时．如果用 s 表示路程，t 表示时间，则 s 是 t 的函数，平均速度就是路程的增量与时间的增量之比

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

其中，$s(t_1),s(t_2)$分别表示在时刻t_1,t_2的路程.

又例如，产品的成本是指生产一定数量产品所需要投入的费用总额，它是关于产品数量的函数，平均成本是指生产单位产品投入的费用，等于成本增量与产品数量增量之比．某公司生产某种产品的成本函数为$C(x)$=200+$\sqrt{x}$（元），其中x表示产品的数量．由成本函数可知，生产 10 件产品的总成本为$C(10)-C(0)$=3.1623（元），其平均成本为$\dfrac{3.1623}{10}=0.3162$（元/件）；而生产 20 件产品的总成本为$C(20)-C(0)$=4.4721（元），则其平均成本为$\dfrac{4.4721}{20}=0.2236$（元/件）．上述结果表明，多生产产品可以降低成本．

以上两个例子虽然实际意义不同，但从抽象的数量关系来看，其实质都是函数的改变量与自变量的改变量之比，称之为平均变化率．

定义 1　在函数$y=f(x)$的定义域内任取两点$x_0,x_0+\Delta x$，当自变量x从x_0变为$x_0+\Delta x$时，相应的函数增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，称比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

为函数$y=f(x)$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$上的**平均变化率**.

函数的平均变化率反应了当自变量改变一个单位长度时函数改变量的大小，或近似地刻画函数在某点的变化性态．但有时候仅仅知道平均变化率还不够．例如，知道了汽车在某段时间内的平均速度还不能说明汽车在哪些时刻开得快，哪些时刻开得慢，以及快多少慢多少．显然，仅掌握计算平均速度是不够的，更为重要的是了解函数在某点处变化的性态．为此，我们讨论下面两个问题．

例 1　变速直线运动的速度

设一物体作变速直线运动，在$[0,t]$这段时间内所经过的路程为s，则s是时间t的函数．求该物体在时刻$t_0\in(0,t)$的速度$v(t_0)$.

解　首先取从时刻t_0到t这样一个时间间隔$\Delta t=t-t_0$，在这段时间间隔内物体从位置$s(t_0)$移动到$s(t)=s(t_0+\Delta t)$，其改变量为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

在这段时间间隔内的平均速度为

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

当时间间隔Δt很小时，可以认为物体在时间$[t_0,t_0+\Delta t]$内近似地做匀速运动．因此，可以用$\overline{v}$作为$v(t_0)$的近似值，且Δt越小，其近似程度就越高．当时间间隔$\Delta t\to 0$时，我们把平均速度$\overline{v}$的极限称为时刻t_0的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2　切线的斜率

设C为一条连续的平面曲线，其方程是$y=f(x)$，如图 3-22 所示．$M(x_0,y_0)$是C上任一点，$N(x,y)$是另外一点，割线MN将绕着点M转动．如果当点N沿曲线C趋向点M时，它

的极限位置存在，设为直线 MT，那么直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线．也就是说，曲线 C 在点 M 处的切线 MT 是 $x \to x_0$ 割线 MN 的极限位置．

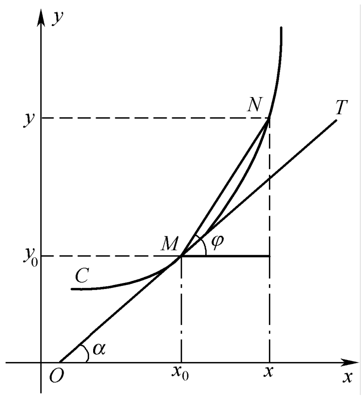

图 3-22

设割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其中φ为割线 MN 的倾角．当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，此时 $x \to x_0$．如果当 $x \to x_0$ 时，上式的极限存在，设为 k，即

$$k = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则割线 MN 就转化成切线 MT，因此自然将割线的斜率的极限定义为曲线 C 在点 M 处切线的斜率

$$k = \lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi = \tan\alpha\ .$$

3.4.2　导数的定义

上面两个例子虽然表示的实际意义不一样，但其数学表达式却是一样的，都是因变量的改变量与自变量的改变量之比，当自变量改变量趋于零时的极限．我们称此极限值为函数的导数．

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果当 $\Delta x \to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，并称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.5}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也称为 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数或导数存在．如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在，就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**不可导**.

特别地，当 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ 时，为以后方便起见，也称函数在点 x_0 处的导数为无穷大，从曲线在点处切线观点来看，该点处的切线平行于 y 轴，即与 x 轴垂直.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在导数 $f'(x_0)$ 的另一个常用等价形式是

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3.6}$$

例 3　求函数 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的导数.

解　根据（3.6）式，有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2\,.$$

即函数曲线在点 $(1,1)$ 处切线的斜率为 2．导数用来描述曲线在该点处相对 x 轴的倾斜程度，导数越大，倾角越大，那么因变量相对自变量的变化就越快．因此，**导数反映了函数随自变量变化的快慢程度**.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，也就是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，根据极限的存在条件，要满足

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

为方便计，称 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

同理，称 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

显然，**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数和右导数均存在且相等**.

例 4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导.

解　$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1$

因为 $f'_+(0)=f'_-(0)=1$，所以函数在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导．这时，

对于任意 $x \in I$，都存在唯一的导数值 $f'(x)$ 与之对应，因而 $f'(x)$ 也是 x 的函数，称其为函数 $f(x)$ 的**导函数**，简称为导数，记为

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

由（3.5）式可得

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.7}$$

3.4.3　求导数举例

根据（3.7）式，求函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的导数可分为以下三个步骤：

（1）求函数的增量： $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

（2）求比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

（3）取极限：$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

例 5　求函数 $f(x) = C$（C 为常数）的导数.

解　$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{C - C}{\Delta x} = 0$，即

$(C)' = 0$.

例 6　求 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ($x \neq 0$)的导数 $f'(x)$ 以及 $f'(1)$.

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x \cdot \Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

由 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ 可得 $f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$.

注意：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是其导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

例 7　求 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$)的导数.

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例 8　求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即 $$(\sin x)'=\cos x$$

类似地，可得 $$(\cos x)'=-\sin x\ .$$

例 9 求函数 $f(x)=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a(\frac{x+\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\ .$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有 $$(\ln x)'=\frac{1}{x}\ .$$

3.4.4 导数的几何意义

由例 2 的讨论可知，如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则导数的几何意义是：$f'(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点(x_0, y_0)处切线的斜率.

由直线的点斜式方程，曲线 $y=f(x)$ 在点(x_0, y_0)处的切线方程为：

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

如果 $f'(x_0)=0$，则切线方程为 $y=y_0$，即切线平行于 x 轴.

如果 $f'(x_0)$ 为无穷大，则切线方程为 $x=x_0$，即切线垂直于 x 轴.

例 10 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2},2)$ 处切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 因为

$$y'=-\frac{1}{x^2}\text{，}\quad y'\big|_{x=\frac{1}{2}}=-4$$

故所求切线方程为 $y-2=-4(x-\frac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$.

3.4.5 函数的可导性与连续性之间的关系

定理 1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数在该点必连续.

证 因为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

由具有极限的函数与无穷小的关系式有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

其中，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，上式两边乘以$\Delta x$，有

$$\Delta y= f'(x_0)\ \Delta x +\alpha\Delta x$$

由此可见，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$，这就是说，函数$y=f(x)$在点x_0处是连续的．即如果函数$f(x)$在点x_0处可导，则函数在该点处必连续．

注意：这个定理的逆定理不一定成立，即函数$y=f(x)$在x_0处连续，在x_0处不一定可导，但如果函数$y=f(x)$在x_0处不连续，则在x_0处一定不可导．

例 11　试讨论函数$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$在$x=0$处的连续性和可导性．

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=f(0)=0$，即$f(x)=|x|$在点$x=0$处连续．

函数在$x=0$处左导数$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$

函数在$x=0$处右导数$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1$

因为$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以$f'(0)$不存在，即$f(x)=|x|$在点$x=0$处不可导．

例 12　设$f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，试讨论$f(x)$在点$x=0$处的导数．

解　$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是连续的，在点$x=0$处，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}=+\infty$$

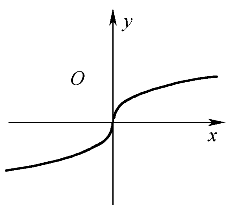

图 3-23

即$f(x)$在点$x=0$处导数为无穷大，即$f(x)$在点$x=0$处不可导．从图 3-23 可以看出，曲线$f(x)$在原点具有垂直于x轴的切线$x=0$．

由上述例 11，例 12 可知，函数在某点处连续是函数在该点处可导的必要条件，但不是充分条件．

习题 3.4

1．当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却，若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度$v(t)$？

2．根据导数的定义，求下列函数在给定点处的导数$f'(x_0)$．

（1）$f(x)=\sin x$，$x_0=0$　　　　（2）$f(x)=10x^2$，$x_0=-1$

3．对函数$y=f(x)$，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$，$k$表示什么？

4．若$f'(x_0)$存在且值为k，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　　（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}$

5．求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　（2）$y=x^5\cdot\sqrt[3]{x}$

（3）$y=\log_5 x$　　（4）$y=2^x\cdot 5^x$

6．一物体的运动的运动规律为$S=t^3\,(\mathrm{m})$，求这物体在$t=2$ (s)时的速度.

7．求下列曲线在给定点处的切线方程：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$M(\dfrac{1}{2},2)$　　（2）$f(x)=\cos x$，$M(\dfrac{\pi}{2},0)$

8．求在抛物线$y=x^2$上横坐标为 3 的点处的切线方程.

9．自变量x取哪些值时，曲线$y=x^2$与$y=x^3$的切线平行？

10．已知$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$，求$f'_+(0)$及$f'_-(0)$，讨论$f'(0)$是否存在.

11．用导数的定义求$f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0\end{cases}$在点$x=0$处的导数.

12．讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ 3x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$在点$x=1$处的连续性与可导性.

13．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，为了使函数$f(x)$在$x=1$处连续且可导，$a,b$应取何值？

3.5　导数运算法则

求函数的变化率——导数，是理论研究和实践应用中经常遇到的一个问题．有必要探讨函数求导的运算法则和基本初等函数的导数公式，借助于这些基本法则和基本初等函数的导数公式，就能很方便的求出常见初等函数的导数.

3.5.1 导数的四则运算法则

定理 1　如果函数$u=u(x)$及$v=v(x)$在点x处可导 那么它们的和、差、积、商（分母为零的点除外）在点x处也可导，且

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ($v(x)\neq 0$).

证　只证明（1），（2）、（3）请读者自己证明.

设$y=u(x)+v(x)$，则

$$\Delta y=[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]$$
$$=[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x})=u'(x)+v'(x)$$

同理可证$[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x)$.

上述法则可以简单的表示为：

$$(u\pm v)'=u'\pm v'，\quad (uv)'=u'v+uv'，\quad (\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

定理 1 中的法则(1)、(2)可推广到任意有限个可导函数的情形.例如,设$u=u(x)$、$v=v(x)$、$w=w(x)$均可导，则有

$$(u+v+w)'=u'+v'+w'$$
$$(uvw)'=(uv)'w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

在法则（2）中，如果$v(x)=C$（C为常数），则有

$$(Cu)'=Cu'.$$

例 1　设$y=2x^3-5x^2+3x-7$，求y'.

解　$y'=(2x^3-5x^2+3x-7)'=(2x^3)'-(5x^2)'+(3x)'-(7)'$
$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+3=6x^2-10x+3$.

例 2　设$f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{4}$，求$f'(x)$及$f'(\frac{\pi}{2})$.

解　$f'(x)=(x^3)'+(4\cos x)'-(\sin\frac{\pi}{4})'=3x^2-4\sin x$

$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi^2-4$.

例 3　设$y=x^3\cdot 3^x$，求y'.

解　$y'=(x^3\cdot 3^x)'=(x^3)'\cdot 3^x+x^3\cdot(3^x)'$
$=3x^2\cdot 3^x+x^3\cdot 3^x\ln 3=x^2\cdot 3^x\cdot(3+x\ln 3)$.

例 4　设$\varphi(t)=\frac{\ln t+1}{\sin t}$，求$\varphi'(t)$.

解　$\varphi'(t)=\frac{(\ln t+1)'\sin t-(\ln t+1)\cos t}{\sin^2 t}=\frac{\frac{1}{t}\cdot\sin t-(\ln t+1)\cos t}{\sin^2 t}$
$=\frac{\sin t-t(\ln t+1)\cos t}{t\sin^2 t}$.

例 5　设$y=\tan x$，求y'.

解　$y'=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$

即
$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

类似地，可得 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

例 6 设 $y = \sec x$，求 y'.

解 $y' = (\sec x)' = (\dfrac{1}{\cos x})' = \dfrac{(1)'\cos x - 1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x\cdot\tan x$.

即 $(\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$

类似地，可得 $(\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$.

3.5.2 反函数求导法

定理 2 如果函数 $x = f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x = \{x|x = f(y), y\in I_y\}$ 内也可导，并且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明略.

定理说明：**反函数的导数等于直接函数导数的倒数.**

例 7 设 $x = \sin y$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 为直接函数，则 $y = \arcsin x$ 是它的反函数. 函数 $x = \sin y$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，且

$$(\sin y)' = \cos y > 0$$

因此，由反函数的求导法则，在对应区间 $I_x = (-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地，有 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

例 8 设 $x = \tan y$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 为直接函数，则 $y = \arctan x$ 是它的反函数. 函数 $x = \tan y$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，且

$$(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0 .$$

因此，由反函数的求导法则，在对应区间 $I_x = (-\infty, +\infty)$内有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

类似地，有 $(\mathrm{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

例 9 设 $x = \log_a y$ $(a>0,\ a\neq 1)$为直接函数，则 $y = a^x$ 是它的反函数. 函数 $x = \log_a y$ 在区间$(0, +\infty)$内单调、可导，且

$$(\log_a y)' = \frac{1}{y\ln a} \neq 0$$

因此，由反函数的求导法则，在对应区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$ 内有

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=y\ln a=a^x\ln a.$$

特别地，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

3.5.3　复合函数求导法则

定理 3　如果 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 处可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x).$$

证　设 Δx 为 x 的改变量，函数 $u=g(x)$ 相应的改变量记为 Δu．当 $\Delta u\neq 0$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

又因为 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，则在点 x 处连续，即当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x})=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)$$

定理表明：复合函数的导数等于函数对中间变量的导数，乘以中间变量对自变量的导数．此法则称为**复合函数的链式法则**．

例 10　设 $y=(x^3+1)^5$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　函数 $y=(x^3+1)^5$ 可看作是由 $y=u^5$，$u=x^3+1$ 复合而成的，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=5u^4\cdot 3x^2=15x^2(x^3+1)^4.$$

注意：中间变量 u 要还原为 x^3+1.

例 11　设 $y=\mathrm{e}^{x^3}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　函数 $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 可看作是由 $y=\mathrm{e}^u$, $u=x^3$ 复合而成的，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

例 12　设 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　函数 $y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$ 是由 $y=\sin u$，$u=\frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成的，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

从上面的例子可以看出，在求复合函数的导数时，关键是要能正确地分解复合函数，然后由外向里，逐层推进求导．在求导的过程中，始终要明确是哪个函数对那个变量求导．在开始时，可以设中间变量，一步一步做下去，熟练后可不必写出中间变量，直接求导.

例 13　设 $y=\ln\sin x$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{dy}{dx}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\cot x$.

例 14 设 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}$.

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形．例如，设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

例 15 设 $y=\ln\cos(e^x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=[\ln\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[-\sin(e^x)]\cdot(e^x)'=-e^x\tan(e^x)$.

例 16 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=(e^{\sin\frac{1}{x}})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$.

例 17 证明幂函数的导数公式：$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (α是任意实数)

证 因为

$$x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\ln x}$$

所以

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

3.5.4 初等函数的求导法则

下面将基本初等函数的导数公式和导数的运算法则汇集如下：

1．基本初等函数的导数公式

（1）$(C)'=0$（C 是常数）；

（2）$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 是任意实数）；

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$；

（4）$(e^x)'=e^x$；

（5）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；

（6）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；

（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x$；

（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$；

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（14）$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；

（16）$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$ 都可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；　　（2）$(Cu)'=Cu'$；

（3）$(uv)'=u'v+uv'$；　　（4）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

3. 反函数的求导法则

设函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导，且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 I_x 内也可导，且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

4. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，且 $f(u)$ 及 $g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x).$$

例 18　将一金属块加热到 100℃，然后放置 20℃在恒温室中冷却．已知其温度的变化规律为 $T=80\mathrm{e}^{-0.2t}+20$ (℃)，其中 t 为冷却时间，求该金属块的冷却速率（即温度的变化率），并求冷却时间 $t=5s$ 时该金属块的温度及冷却速率（精确到 0.1℃）.

解　金属块的冷却速率，即温度 T 对时间 t 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=80(-0.2)\mathrm{e}^{-0.2t}=-16\mathrm{e}^{-0.2t} \ (℃/s)$$

$$T\big|_{t=5}=80\times\mathrm{e}^{-0.2\times5}+20\approx 49.4 \ (℃)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=5}=-16\mathrm{e}^{-0.2\times5}=-16\mathrm{e}^{-1}\approx -5.9 \ (℃/s).$$

例 19　在某项记忆力测试中，某人在 t 分钟后能够记住 M 个单词，其中 $M=-0.001t^3+0.1t^2$．求记住的单词数关于时间的变化率，并求在前 10 分钟（$t=10$）内可以记住多少单词，以及在 $t=10$ 分钟时的记忆率是多少？

解　记住的单词数关于时间的变化率，即 M 对 t 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-0.003t^2+0.2t$$

$$M\big|_{t=10}=-0.001\times10^3+0.1\times10^2=9$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right|_{t=10}=-0.003\times10^2+0.2\times10=1.7.$$

3.5.5　隐函数求导法

前面几节所讨论的求导法则适用于因变量 y 与自变量 x 之间的函数关系是显函数 $y=f(x)$ 的形式．但有时，变量 y 与 x 的之间的函数关系是由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，即 y 与 x 的关系隐含在方程 $F(x,y)=0$ 中．我们称这种由未解出因变量的方程所确定的 y 与 x 之间的

函数关系为隐函数．例如，$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$e^y+xy-e=0$，$e^x+e^y-xy=0$等都是隐函数．

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化．例如隐函数$x^2-y+4=0$可以显化为$y=x^2+4$．但有些隐函数的显化是有困难，甚至是不可能的，例如方程$e^x+e^y-xy=0$就无法把y表示成x的显函数的形式．但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来．下面举例说明隐函数的求导方法．

假设由方程$F(x,y)=0$所确定的函数为$y=f(x)$，则把它代回方程$F(x,y)=0$中，得到

$$F(x,f(x))=0$$

利用复合函数求导法则，在上式两边同时对x求导，再解出所求导数y'，这就是**隐函数求导法**．

例 20　求由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数y'．

解　把y看成关于x的函数，方程两边的每一项对x求导数，得

$$(e^y)'+(xy)'-(e)'=(0)'$$

即

$$e^y\cdot y'+(y+xy')-0=0$$

从而

$$y'=-\frac{y}{x+e^y}\quad(x+e^y\neq 0).$$

注意：求隐函数的导数时，只需要将确定隐函数的方程两边同时对自变量x求导，凡是遇到含有因变量y的项时，把y当作中间变量看待，即y是x的函数，再按复合函数求导法则求之．例如，$(xy)'=y+xy'$，$(\frac{x}{y})'=\frac{y-xy'}{y^2}$，$(y^2)'=2y\cdot y'$，$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'$，$(\sin y)'=\cos y\cdot y'$，$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot y'$等，最后从所得等式中解出$y'$．

例 21　求由方程$y^5+2y-x-3x^7=0$所确定的隐函数在$x=0$处的导数$y'|_{x=0}$．

解　把方程两边同时对x求导数得

$$5y^4\cdot y'+2y'-1-21x^6=0$$

解得

$$y'=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因为当$x=0$时，从原方程得$y=0$，所以

$$y'|_{x=0}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

例 22　求椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上点$(2,\ \frac{3}{2}\sqrt{3})$处的切线方程．

解　把椭圆方程的两边分别对x求导，得

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

解得

$$y'=-\frac{9x}{16y}$$

当 $x=2$ 时，$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，代入上式得所求切线的斜率

$$k=y'|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

所求的切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)\text{，即}\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0\,.$$

3.5.6　对数求导法

在求导数时有时会遇到一些函数，直接对其求导很困难，例如，形如 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 的幂指函数或者多因子之积的函数，这时，一般采用先在函数的两边取自然对数，变成隐函数的形式，然后利用隐函数的求导方法求出它的导数，这种方法叫做**对数求导法**．方法如下：

设 $y=f(x)$，两边取对数，得

$$\ln y=\ln f(x)$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]'$$

则

$$y'=y\cdot[\ln f(x)]'=f(x)\cdot[\ln f(x)]'\,.$$

例 23　求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数．

解　**解法 1**：两边取对数，得

$$\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

于是

$$y'=y(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x})=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})\,.$$

解法 2：幂指函数的导数也可先将函数变成指数函数，然后采用复合函数求导法则求导．因为

$$y=x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\ln x^{\sin x}}=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}$$

所以

$$y'=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}(\sin x\cdot\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})\,.$$

例 24 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 先在两边取对数（假设 $x>4$），得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})$$

于是

$$y'=\frac{y}{2}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}).$$

3.5.7 参数方程求导法

在平面解析几何里，许多平面曲线方程是用参数形式给出的，例如圆心在原点，半径为 2 的圆周方程可表示为：$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，这表明：$x,y$ 都与 t 存在函数关系．如果把对应于同一个 t 值的 x 与 y 值看作是对应的，这样就得到 y 与 x 之间的函数关系．消去参数 t，得到 $x^2+y^2=4$，这就是 x 和 y 的隐函数关系式，也称为由参数方程所确定的隐函数关系式.

一般地，若参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定 y 与 x 的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

在实际问题中，需要计算由参数方程所确定的函数的导数．从参数方程中消去参数 t 有时会有困难．因此，我们希望有一种能直接由参数方程计算出它所确定的函数的导数的方法.

若 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}$，两边取 $\Delta t\to 0$ 时的极限，此时 $\Delta x,\Delta y$ 也趋于零，得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{3.8}$$

（3.8）式就是由参数方程确定的函数的求导法则，可以表述为：**因变量对参数的导数除以自变量对参数的导数.**

例 25 求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在相应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 点处的切线方程.

解 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$ 得所求切线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

切点的坐标为：$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$， $y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

所以，切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$$

例 26　计算由摆线的参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'}$

$$=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}\quad（t\neq 2n\pi,n\ 为整数）.$$

3.5.8　高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是路程函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{ds}{dt}\ 或\ v(t)=s'(t)$$

而加速度 a 又是速度 $v(t)$ 关于时间 t 的变化率，即速度 $v(t)$ 对时间 t 的导数

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d(\frac{ds}{dt})}{dt}=[s'(t)]'$$

于是，加速度就是路程函数对时间的导数的导数，称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数，记为 $s''(t)$，因此，变速直线运动的加速度就是路程函数对时间的二阶导数，即

$$a(t)=s''(t)$$

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是关于 x 的函数．我们把 $y'=f'(x)$ 的导数称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''、$f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y''=(y')'，\quad f''(x)=[f'(x)]'，\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

相应地，把函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，三阶导数的导数称为四阶导数，…，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}\quad 或\quad \frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么函数 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数.

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

例 27　设 $y=x^{30}$，求 $y^{(30)},y^{(31)}$.

解　$y' = 30y^{29}$，$y'' = 30\cdot 29y^{28}$，$y''' = 30\cdot 29\cdot 28y^{27}$ …，

$$y^{(30)} = 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = 30!$$

$$y^{(31)} = (30!)' = 0 .$$

一般地，$(x^n)^{(n)} = n!$，$(x^n)^{(n+1)} = 0$（n 为正整数）.

例 28　求函数 $y = e^x$ 的 n 阶导数.

解　$y' = e^x$，$y'' = e^x$，$y''' = e^x$，$y^{(4)} = e^x$，…，所以

$$y^{(n)} = e^x .$$

即　$$(e^x)^{(n)} = e^x .$$

例 29　求正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 的 n 阶导数.

解　$y = \sin x$，

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) ,$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}) ,$$

$$y''' = \cos(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}) ,$$

$$y^{(4)} = \cos(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}) ,$$

一般地，

$$y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})，即\ (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2}) .$$

类似地，　$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2}) .$$

例 30　某汽车在限速为 80km/h 的路段上行驶，在途中发生了事故．警察测得该车的刹车痕迹为 30m，而该车型的满刹车时的加速度为 $a = -15\,\text{m/s}^2$，警察判该车为超速行驶，应承担一部分责任，为什么？

解　是否超速行驶，应该看该车刹车之前的行驶速度 v_0 是否大于 $80\,\text{km/h}$.

设该车从刹车开始到 t 时刻所走的路程为 $s = s(t)$，作匀减速运动，所以有

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

开始刹车后 t 时刻汽车的速度为

$$v = s' = v_0 + at$$

汽车从开始刹车到停止所用的时间如下求得

$$0 = at + v_0，即\ t = -\frac{v_0}{a}$$

将 $a = -15\,\text{m/s}^2$，$s = 30\text{m}$，$t = -\frac{v_0}{a}$ 代入 $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 得

$$30 = -\frac{15}{2}(-\frac{v_0}{15})^2 + \frac{v_0^2}{15}$$

解得

$$v_0 = 30\text{m/s} = 30 \times 3.6\text{km/h} = 108\,\text{km/h}$$

所以，该车在开始刹车前的行驶速度大于 80km/h，是超速行驶，警察的判罚是正确的.

习题 3.5

1．求下列函数的导数（其中 a,b 为常数）：

（1）$y = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + 10$　　（2）$y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x^2}$

（3）$y = x^2(2 + \sqrt{x})$　　（4）$y = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{\sqrt{x}}$

（5）$y = \dfrac{ax + b}{a + b}$　　（6）$y = (x - a)(x - b)$

2．求下列函数的导数：

（1）$y = x^3 \cdot 3^x$　　（2）$y = \mathrm{e}^x \cdot \ln x$

（3）$y = x^2 \cdot \ln x$　　（4）$y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

（5）$y = \sqrt{x}\sin x$　　（6）$y = \mathrm{e}^x \cos x$

（7）$y = x\arctan x$　　（8）$y = x^2\mathrm{e}^x$

（9）$y = \dfrac{1+x}{1-x}$　　（10）$y = \dfrac{5x}{1+x^2}$

（11）$y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$　　（12）$y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \ln 3$

3．求下列函数的导数：

（1）$s = \dfrac{1 + \sin t}{1 + \cos t}$　　（2）$y = x\sin x + \cos x$

（3）$y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$　　（4）$y = \dfrac{5\sin x}{1 + \cos x}$

（5）$f(x) = x\sin x\cos x$　　（6）$y = x^2\ln x\cos x$

4．求下列函数在给定点处的导数：

（1）$f(x) = \sin x - \cos x$，求 $f'(\dfrac{\pi}{4}), f'(\dfrac{\pi}{6})$；

（2）$\rho = \theta\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$；

（3）$f(x) = \dfrac{3}{5-x} + \dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$，$f'(2)$.

5．求下列函数的导数：

（1）$y = (3x + 7)^5$　　（2）$y = 3\sin(4x + 5)$

（3） $y=\sin x^2$ （4） $y=\sin^2 x$

（5） $y=2^{\sin x}$ （6） $y=\sin 2^x$

（7） $y=\mathrm{e}^{-2x^3}$ （8） $y=\ln(1+x^2)$

（9） $y=\sqrt{a^2-x^2}$ （10） $y=\ln\cos x$

（11） $y=(\arcsin x)^2$ （12） $y=\arctan(\mathrm{e}^x)$

6．求下列函数的导数：

（1） $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$ （2） $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（3） $y=\arcsin\sqrt{x}$ （4） $y=\arcsin(1-2x)$

（5） $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$ （6） $y=\arccos\sqrt{x}$.

7．求下列函数的导数：

（1） $y=(\arcsin\dfrac{x}{2})^2$ （2） $y=(x+\sin^2 x)^4$

（3） $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ （4） $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$

（5） $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$ （6） $y=\ln[\ln(\ln x)]$

8．求由下列方程所确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ （2） $x^3+y^3-3xy=0$

（3） $y=x+\ln y$ （4） $\sin y=\ln(x+y)$

9．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+y}{y}=y$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

10．求曲线 $y\mathrm{e}^x+\ln y=1$ 上点(0,1)的切线方程.

11．求下列函数的导数：

（1） $y=x^{\sqrt{x}}$ （2） $y=(\ln x)^x$

（3） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ （4） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^3}$

12．求由下列参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^3\end{cases}$ （2） $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$

（3） $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3-t\end{cases}$ （4） $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\ y=\theta\cos\theta\end{cases}$

13．已知$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$，求当$t=\dfrac{\pi}{3}$时$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的值.

14．求曲线$\begin{cases} x = 1 + 2t - t^2 \\ y = 4t^2 \end{cases}$在点(1,16)的切线方程和法线方程．

15．求下列函数的二阶导数：

（1）$y = x^{10} + 3^x + 2\sin 3x$　　（2）$y = (x+3)^4$

（3）$y = x\cos x$　　（4）$y = \ln(1+2x)$

（5）$y = x^2 e^x$　　（6）$y = xe^{x^2}$

（7）$y = \dfrac{e^x}{x}$　　（8）$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

（9）$y = (1+x^2)\arctan x$　　（10）$y = x^x$

16．作直线运动的物体的运动方程如下，求物体在给定的时刻的速度 v(m/s)、加速度 a (m/s^2)：

（1）$S = t^3 - 3t + 2$，$t = 2$　　（2）$S = t + \dfrac{1}{t}$，$t = 3$

3.6　微分及其应用

导数表示函数在点 x 处的变化率，它描述了函数在点 x 处变化的快慢程度．在许多实际问题中，我们常常还要计算函数在某一点处当自变量有一个微小的改变量 Δx 时，函数相应的改变量 Δy 的大小．除一些特殊情形外，改变量的计算往往是比较困难的，于是我们考虑能否借助比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限（即导数）及 Δx 来近似表示 Δy．这就涉及到微分学中另一个重要的概念——微分．

3.6.1　微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，其导数为 $f'(x_0) = A$，根据导数定义有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

由无穷小与函数极限的关系，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \quad（\alpha 为 \Delta x \to 0 时的无穷小）$$

于是

$$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \cdot \alpha$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x \cdot \alpha}{\Delta x} = 0$，习惯上将 $\Delta x \cdot \alpha$ 记成 $o(\Delta x)$，即 $\Delta x \cdot \alpha = o(\Delta x)$，含义是关于 Δx 的高阶无穷小，表示比 Δx 趋于零的速度更快．那么

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

上式表明，当自变量的改变量 $\Delta x \to 0$ 时，函数的改变量 Δy 的大小由 $A\Delta x$ 和 $o(\Delta x)$ 两项组成．因为 $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小，也就是说当 $\Delta x \to 0$ 时，$o(\Delta x)$ 比 Δx 趋于 0 的速度更快，Δx 已经很小很小了，$o(\Delta x)$ 更加的小，与 $A\Delta x$ 相比可以忽略不计，因此，Δy 的大小主要由 $A\Delta x$ 确定，即

$$\Delta y \approx A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$$

$A\Delta x$ 是 Δx 的**线性函数**，称为 Δy 的**线性主部**，并叫做**函数 $f(x)$ 的微分**.

定义 1 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有导数 $f'(x_0)$，Δx 是自变量的改变量，称 $f'(x_0)\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

由定义可知，$\mathrm{d}y$ 依赖于函数 $f(x)$、点 x_0 及自变量的改变量 Δx.

例 1 求函数 $y = x^2$ 当 $x = 1, \Delta x = 0.02$ 时的微分，并说明其几何意义.

解 $y' = 2x$，所以 $\mathrm{d}y = 2x \cdot \Delta x\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.02}} = 0.04$.

其几何意义是：当边长为 1 的正方形边长增加 0.02 时，其面积大约增加了 0.04.

当函数 $y = x$ 时，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$，即自变量 x 的微分 $\mathrm{d}x$ 就等于它的改变量 Δx，于是函数的微分可以写成

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

一般地，函数 $y = f(x)$ 在任一点 x 处的微分称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)\mathrm{d}x$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

这就是说，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数．因此，导数也叫做“**微商**”.

例如，$\mathrm{d}\cos x = (\cos x)'\mathrm{d}x = -\sin x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x)'\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3.6.2 微分的几何意义

微分的几何意义如图 3-24 所示，PM 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线，倾斜角为 α，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0 + \Delta x$ 时，对应的函数改变量为

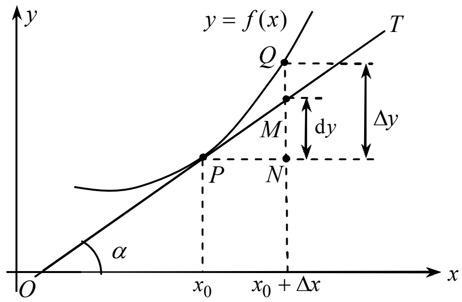

图 3-24

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = NQ$$

由于 $\dfrac{MN}{NP} = \tan\alpha = f'(x_0)$，所以 $MN = f'(x_0) \cdot NP = f'(x_0)\Delta x$，即

$$\mathrm{d}y = MN$$

由此可知，函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分，在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线的

纵坐标对应于横坐标改变量Δx的改变量．

注意到，$\mathrm{d}y$与函数增量$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = NQ$之差

$$|\Delta y - \mathrm{d}y| = MQ$$

所以用微分$\mathrm{d}y$近似代替改变量Δy产生的误差就是MQ，当$|\Delta x|$很小时，MQ比MN小得多，故当$|\Delta x| = |x-x_0|$很小时，有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y \text{ 或 } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

上式表明，用微分近似代替改变量Δy，实质上就是在点x_0附近（微小局部）用线性函数$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$近似代替函数$y = f(x)$．在几何上就是在点$P$附近用切线$PM$近似代替曲线段$PQ$．在微小局部用直线段近似代替曲线段，即“以直代曲”是微积分的基本思想之一，通常称为非线性函数的局部线性化，这种思想方法在实际问题中有广泛应用．

3.6.3　微分公式与微分运算法则

从函数的微分的表达式

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

可以看出，要计算函数的微分，只要计算函数的导数，再乘以自变量的微分即可．因此，可得如下的微分公式和微分运算法则．

1．基本初等函数的微分公式

导数公式:	微分公式:
$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
$(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x) = -\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2．函数和、差、积、商的微分法则

求导法则：

$(u\pm v)'=u'\pm v'$

$(Cu)'=Cu'$（C 为常数）

$(u\cdot v)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$

微分法则：

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$

$\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$

$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0)$

例 2　求下列函数的微分：

（1）$y=x^3-\sin x+\cos x$；　　（2）$y=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$．

解　（1）因为 $y'=3x^2-\cos x-\sin x$，所以

$$\mathrm{d}y=(3x^2-\cos x-\sin x)\mathrm{d}x\ .$$

（2）因为 $y'=2\mathrm{e}^x\cos x$，所以

$$\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x\ .$$

3．复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\cdot g'(x)\mathrm{d}x\ .$$

由于 $g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}g(x)=\mathrm{d}u$，所以，复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u\ .$$

由此可见，无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变．这一性质称为**一阶微分形式不变性**．性质表示，当变换自变量时，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 并不改变．

例 3　设 $y=\sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$．

解　把 $2x+1$ 看成中间变量 u，则

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\sin u)=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x\ .$$

例 4　设 $y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$．

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

例 5　设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$．

解　由 $\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}\cos x)=\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x})+\mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\&=\cos x\cdot\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-3)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(-\sin x)\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{1-3x}\cdot(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

例 6　在括号中填入适当的函数，使等式成立．

（1）$\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$；　　（2）$\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$．

解　（1）因为 $\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$，所以

$$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)\text{，即}\ \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)=x\mathrm{d}x\ .$$

一般地，有

$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2+C)=x\mathrm{d}x\ \text{（}C\text{ 为任意常数）.}$$

（2）因为 $\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$，所以

$$\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t)\ .$$

因此

$$\mathrm{d}(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C)=\cos\omega t\mathrm{d}t\ .$$

3.6.4　微分的应用

1．函数的近似计算

微分用于近似计算的基本思想是：在微小局部将给定的函数线性化，即在点 x_0 的邻域内，由近似等式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{3.9}$$

来计算函数 $f(x)$ 的值．由于该式右端是线性函数，其值较易计算，因而为近似计算函数 $f(x)$ 的值提供了方便．

例 7　求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值．

解　令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，由（3.9）式得

$$\sqrt[3]{x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x_0^2}}(x-x_0)$$

令 $x_0=1, x=1.02, x-x_0=0.02$，于是

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot 0.02\approx 1.0067\ .$$

例 8　利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值．

解　我们可将这个问题看成是求函数 $f(x)=\sin x$ 在点 $x=30^\circ 30'$ 处的函数值的近似值问题．由（3.9）式得

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\sin x_0+\cos x_0\cdot\Delta x$$

这里，$x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=30'=\frac{\pi}{360}$，所以

$$\sin 30^\circ 30'=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}=0.5076\ .$$

在（3.9）式中，令 $x_0=0$，当 $|\Delta x|=|x|$ 充分小时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \tag{3.10}$$

根据（3.10）式容易得到下面一些常用的近似公式：

$$\sin x\approx x\text{；}\ \tan x\approx x\text{；}\ \mathrm{e}^x\approx 1+x\text{；}\ \ln(1+x)\approx x\text{；}\ \sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x\ .$$

例 9 计算$\sqrt{1.005}$的近似值.

解 $\sqrt{1.005}=\sqrt{1+0.005}$，利用公式$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$进行计算，这里取$x=0.005$，其值相对较小，故

$$\sqrt{1.005}=\sqrt{1+0.005}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.005=1.0025\ .$$

例 10 有一批半径为1cm的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为0.01cm，试估计每只球需要多少克铜（铜的密度是$8.9\,\mathrm{g/cm^3}$）?

解 先求出镀层的体积，再乘上密度就得到每只球所需铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差，所以它就是球体体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$当R自R_0取得增量ΔR时的增量ΔV．我们求V对R的导数

$$V'\Big|_{R=R_0}=(\frac{4}{3}\pi R^3)'\Big|_{R=R_0}=4\pi R_0^2$$

所以由（3.9）式得

$$\Delta V\approx 4\pi R_0^2\cdot\Delta R$$

将$R_0=1, \Delta R=0.01$代入上式得

$$\Delta V\approx 4\times 3.14\times 1^2\times 0.01=0.13\ (\mathrm{cm^3})$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times 8.9\approx 1.6\ (\mathrm{g})\ .$$

2．误差估计

在生产实践中，经常要测量各种数据．但是有的数据不易直接测量，这时我们就通过测量其它有关数据后，根据某种公式算出所要的数据．由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样用微分来估计间接测量误差.

绝对误差与相对误差：如果某个量的精确值为A，它的近似值为a，那么$|A-a|$叫做a的**绝对误差**，而绝对误差$|A-a|$与$|a|$的比值$\frac{|A-a|}{|a|}$叫做a的**相对误差**.

在实际工作中，某个量的精确值往往是无法知道的，于是绝对误差和相对误差也就无法求得．但是根据测量仪器的精度等因素，有时能够确定误差在某一个范围内．如果某个量的精确值是A，测得它的近似值是a，又知道它的误差不超过δ_A:$|A-a|\leqslant\delta_A$，则δ_A叫做测量A的绝对误差限，$\frac{\delta_A}{|a|}$叫做测量A的相对误差限（简称绝对误差）.

例 11 设测得圆钢截面的直径$D=60.03\ (\mathrm{mm})$，测量D的绝对误差限$\delta_D=0.05$．利用公式$A=\frac{\pi}{4}D^2$计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差.

解 $\Delta A\approx \mathrm{d}A=A'\cdot\Delta D=\frac{\pi}{2}D\cdot\Delta D$，$|\Delta A|\approx|\mathrm{d}A|=\frac{\pi}{2}D\cdot|\Delta D|\leqslant\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D$.

已知 D=60.03,δ_D=0.05，所以

绝对误差限为

$$\delta_A = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.03 \times 0.05 = 4.715\ (\text{mm}^2)；$$

相对误差限为

$$\frac{\delta_A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \cdot \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.03} \approx 0.17\% .$$

习题 3.6

1．设 $y = x^3 + x + 1$，当 $x = 2$, $\Delta x = 0.01$ 时分别计算 Δy 和 $\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分：

（1）$y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$　　（2）$y = x \sin 2x$

（3）$y = \frac{x}{1 + x^2}$　　（4）$y = x^2 \mathrm{e}^{2x}$

（5）$y = \ln^2(1 - x)$　　（6）$y = \ln\sqrt{1 - x^3}$

（7）$y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3 - x)$　　（8）$y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$

3．将适当的函数填入括号内，使下列等式成立：

（1）$\mathrm{d}(\quad) = 2\mathrm{d}x$　　（2）$\mathrm{d}(\quad) = 3x\mathrm{d}x$

（3）$\mathrm{d}(\quad) = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　（4）$\mathrm{d}(\quad) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

（5）$\mathrm{d}(\quad) = 2^x\mathrm{d}x$　　（6）$\mathrm{d}(\quad) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x$

（7）$\mathrm{d}(\quad) = \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x$　　（8）$\mathrm{d}(\quad) = \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$

4．计算下列各式的近似值：

（1）$\cos 29^\circ$；　　（2）$\sqrt[3]{996}$

5．边长为 a 的金属立方体受热膨胀，边长增加 h 时，立方体的体积大约增加了多少？

3.7　利用 MATLAB 计算极限和导数

3.7.1　极限的运算

在实际运算中，极限运算需要很多技巧，因而比较复杂．而 Matlab 提供了多种求极限的运算函数，使得原本在高等数学中较为复杂的函数极限的求解变得简单．下面给出符号函数的极限运算调用格式，如表 3-5 所示．

表 3-5　limit 命令的调用格式与说明

调用格式	说明
limit(F,x,a)	计算当 $x \to a$ 时 $F = F(x)$ 的极限值．其中 F 可以是数学函数表达式，也可以是预先定义好的函数变量．a 可以是符号，也可以是常数，作为符号时须预先定义
limit(F)	按系统默认自变量 x，计算当 $x \to 0$ 时符号函数表达式 F 的极限值
limit(F,a)	按系统默认自变量 x，计算当 $x \to a$ 时符号函数表达式 F 的极限值
limit(F,x,a,'right')	计算当 $x \to a^+$ 时符号函数表达式 F 的右极限值
limit(F,x,a,'left')	计算当 $x \to a^-$ 时符号函数表达式 F 的左极限值

其中 a 可以变为任何有限实数，也可以为 ∞（程序中书写为 inf）.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解　输入语句如下：

```
>>syms x a;                    %定义符号变量x和a
>>limit((x^2-1)/(x-1),x,1)     %求函数((x^2-1)/(x-1)当x→1时的极限
```

运行结果为

```
ans =
     2
```

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　输入语句如下：

```
>>syms  x  a;
>>limit(sin(x)/x,x,0)
```

运行结果为

```
ans =
     1
```

输入语句如下：

```
>>syms  x  a;
>>limit(sin(x)/x,x,a)
```

运行结果为

```
ans =
     sin(a)/a
```

例 3　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x-1}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}$　　（3）$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$

（4）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)-\log x}{h}$　　（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$

解　输入语句如下：

```
>>syms x h n;
>>L1 = limit((cos(x)-1)/x)
```

```
>>L2 = limit(1/x^2,x,0,'right')
>>L3 = limit(1/x,x,0,'left')
>>L4 = limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)
>>L5 = limit((1+2/n)^(3*n),n,inf)
```

运行结果为：

```
L1 = 0
L2 = inf
L3 = -inf
L4 = 1/x
L5 = exp(6)
```

3.7.2　导数与微分的计算

在数学里，一元函数 $y = f(x)$ 的各阶导数记为 $y', y'', y''', \ldots$，在 Matlab 里求函数的导函数的命令是 diff，其调用格式如表 3-6 所示.

表 3-6　diff 命令的调用格式与说明

调用格式	说明
diff(F, 'x')	计算符号表达式 F 对指定符号变量 x 的一阶导数．其中 F 可以是数学函数表达式，也可以是预先定义好的函数变量
diff(F)	计算符号表达式 F 对系统默认自变量的一阶导数
diff(F,n)	计算符号表达式 F 对系统默认自变量的 n 阶导数
diff(F,n, 'x')	计算符号表达式 F 对指定符号变量 x 的 n 阶导数

例 4　求一元函数 $e^x(\sqrt{x} + 2^x)$ 和 $\ln\ln x$ 的一阶和三阶导数.

解　输入语句如下：

```
>>syms  x  y  t  u  v  z  a  b      %定义符号变量
>>S=exp(x)*(sqrt(x)+2^x);           %定义符号函数
>>diff(S)                           %计算符号函数的一阶导数
```

运行结果为

```
ans=
    exp(x)*(x^(1/2)+2^x)+exp(x)*(1/2/x^(1/2)+2^x*log(2))
```

输入语句

```
>>diff(S,3)                         %计算符号函数的三阶导数
```

运行结果为

```
ans=
exp(x)*(x^(1/2)+2^x)+3*exp(x)*(1/2/x^(1/2)+2^x*log(2))+ 3*exp(x)*(-1/4/x^(3/2)+2^x*log(2)^2)+
exp(x)*(3/8/x^(5/2)+2^x*log(2)^3)
```

输入语句

```
>>S=log(log(log(x)));
>>diff(S)
```

运行结果为

```
ans=
    1/x/log(x)/log(log(x))
```

输入语句

```
>>diff(S,3)                          %计算符号函数的三阶导数
```

运行结果为

```
ans=
2/x^3/log(x)/log(log(x))+ 3/x^3/log(x)^2/log(log(x))+ 3/x^3/log(x)^2/log(log(x))^2+2/x^3/
log(x)^3/log(log(x))+ 3/x^3/log(x)^3/log(log(x))^2+2/x^3/log(x)^3/log(log(x))^3
```

习题 3.7

1．利用 Matlab 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx-\sin mx}{x^3}$　　（2）$\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{x-y}$

（3）$\lim\limits_{x\to y}\left(\dfrac{x+m}{x-n}\right)^x$　　（4）$\lim\limits_{x\to \pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty} n[\log(n+1)-\log n]$　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty} 2^n\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}$

2．利用 MATLAB 求下列函数的导数：

（1）已知 $y=\arcsin(a\cdot\sin x)$，求 y''．

（2）已知 $y=\mathrm{e}^{-x}\ln x$，求 $y^{(5)}$．

（3）已知 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$，求 $y^{(8)}$．

（4）已知 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(20)}$．

总习题三

一、填空题

（在“充分”、“必要”、“充要”和“既非充分也非必要”4 个中选择一个正确的填入 1～6 题的空格内）

1．$f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的__________条件．

2．$f(x)$ 在点 x_0 处的左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在是 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的__________条件.

3．$f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x)$ 及右导数 $f'_+(x)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的条件.

4．$f(x)$ 在点 x_0 处连续是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的__________条件.

5．$f(x)$ 在点 x_0 处连续是 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的__________条件.

6．$f(x)$ 在点 x_0 处可导是 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的__________条件.

7．$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x} =$__________.

8．已知 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$，则 $a =$__________，$b =$__________.

9．已知 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + a}{x - 1} = b$，则 $a =$__________，$b =$__________.

10．要使 $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$ 在 $x = 0$ 处连续，应该补充定义 $f(0) =$__________.

11．设 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x(x - 1)}$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的______________间断点；$x = 1$ 是 $f(x)$ 的______________间断点.

12．$f(x) = x^2$，则 $f(f'(x) + 1) =$__________.

13．设 $y = \ln[\arctan(1 - x)]$，则 $\mathrm{d}y =$__________.

14．设 $f(x) = (1 + \cos x)^{x+1} \sin(x^2 - 3x)$，则 $f'(0) =$__________.

15．设 $f(x) = (x - 1)(x - 2)\cdots(x - n)$，则 $f'(1) =$__________，$f^{(n+1)}(x) =$__________.

二、选择题

1．下列极限存在的是（　　）.

A．$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(x + 1)}{x^2}$　　B．$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2^x - 1}$

C．$\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$　　D．$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$

2．$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} =$（　　）.

A．1　　B．2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．0

3．下列函数在指定的变化过程中，（　　）是无穷小量.

A．$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$(x \to \infty)$　　B．$\dfrac{\sin x}{x}$，$(x \to \infty)$

C．$\ln(1 + x)$，$(x \to 1)$　　D．$\dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$，$(x \to 0)$

4．下列命题正确的是（　　）．

A．当 $x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量　　B．当 $x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大量

C．当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量　　D．当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小量

5．下面结论正确的是（　　）．

A．$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=e$　　B．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=e$

C．$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{1-x}=e$　　D．$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}=e$

6．下列命题正确的是（　　）．

A．$f'(x_0)=[f(x_0)]'$

B．$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

C．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

D．$f'(x_0)=0$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与 x 轴平行

7．设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ x, & x\leqslant 0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）．

A．连续且可导　　B．连续但不可导

C．不连续但可导　　D．既不连续又不可导．

8．曲线 $y=x^3-x$ 在点(1,0)处的切线是（　　）．

A．$y=2x-2$　　B．$y=-2x+2$

C．$y=2x+2$　　D．$y=-2x-2$．

9．已知 $y=3x^4e^{10}$，则 $y^{(10)}=$（　　）．

A．x^3　　B．$3x^2$　　C．$6x$　　D．0

10．若 $f(\frac{1}{x})=x$，则 $f'(x)=$（　　）．

A．$\dfrac{1}{x}$　　B．$\dfrac{1}{x^2}$　　C．$-\dfrac{1}{x}$　　D．$-\dfrac{1}{x^2}$

三、计算题

1．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x-12}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+\sin 3x}-3}{x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x+3})^{x+2}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{3-x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1})$　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-2x)^5(3x^2+x+2)}{(x-1)(2x-3)^6}$

2．设函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \end{cases}$$

问：（1） a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限存在？

（2） a,b 为何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

3．求下列函数的导数：

（1） $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$

（2） $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$

（3） $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$

（4） $y=\sqrt[x]{x}\quad(x>0)$

4．求下列函数的二阶导数

（1） $y=\cos^2 x\cdot\ln x$

（2） $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5．设方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定为的函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

6．求下列由参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1） $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

（2） $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$