第 3 章　随机变量的数字特征

本章学习目标

- 理解数学期望的概念，会求一些随机变量的数学期望
- 理解方差的概念，会求一些随机变量的方差
- 掌握常见的随机变量的数学期望与方差
- 了解随机变量的矩、协方差与相关系数

随机变量的分布函数是对随机变量概率性质的完整的刻画，描述了随机变量的统计规律性，但在实际问题中，有时不容易确定随机变量的分布；有时则并不需要完全知道随机变量的分布，而只需要知道它的某些特征就够了，因此不需要求出它的分布函数．这些特征就是随机变量的数字特征，它们是由随机变量的分布所决定的常数，刻画了随机变量某一方面的性质．

例如，考察某种大批量生产的产品的使用寿命，它可以用随机变量来描述，如果知道了这个随机变量的分布函数，就可以计算产品寿命落在任一指定界限内的产品的百分比，这是对产品寿命状况的完整刻画．如果不知道随机变量的分布函数，而知道产品的平均使用寿命，虽然不能对产品寿命状况提供一个完整的刻画，但却在一个重要方面刻画了产品寿命的状况，这往往也是我们最为关心的一个方面．类似的情况很多，例如评定某地区粮食产量的水平时，经常考虑平均亩产量；对某一射手进行技术评估时，经常考察射击命中环数的平均值；检查一批棉花的质量时，所关心的是棉花纤维的平均长度等．这个重要的数字特征就是数学期望，简称为期望，常常也称为均值．

另一个重要的数字特征用以衡量一个随机变量的取值的分散程度．例如对一射手进行技术评定时，除考察射击命中环数的平均值以外，还要了解命中点是分散还是比较集中．在检查一批棉花的质量时，除关心棉花纤维的平均程度以外，还要考虑纤维的长度与平均长度的偏离程度．如果两批棉花的平均长度相同，而一批棉花纤维的长度与平均长度接近，另一批棉花则相差较大，显然，前者显得整齐，也便于使用，而后者显得参差不齐，不便于使用．描述随机变量取值分散程度的数字特征就是方差．

期望和方差是刻画随机变量性质的两个最重要的数字特征．数字特征能够比较容易地估算出来，在理论上和实践上都具有重要的意义．其他的数字特征还有矩和协方差、相关系数等．

3.1　随机变量的数学期望

3.1.1　离散型随机变量的数学期望

例 1　假设对一个零件的某个特征进行的 n 次测量中，有 n_1 次测得结果为 x_1，n_2 次测得

结果为x_2，…，n_k次测得结果为x_k，试求随机变量X的n次观测值的平均值.

解 设测量结果的平均值为$\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1n_1+x_2n_2+\cdots+x_kn_k)=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\cdots+x_k\frac{n_k}{n}$$

$$=x_1f_n(x_1)+x_2f_n(x_2)+\cdots+x_kf_n(x_k)=\sum_{i=1}^{k}x_if_n(x_i),$$

其中$\sum_{i=1}^{k}x_i=n$；$f_n(x_i)=\frac{n_i}{n}$是测量结果x_i的频率，且$\sum_{i=1}^{k}f_n(x_i)=1$.

由此可见，测量结果的平均值$\bar{x}$是以频率$f_n(x_i)$为权的加权平均值.

由于频率具有稳定性，即当试验次数n很大时，事件$\{X=x_i\}$的频率$f_n(x_i)$将在概率p_i的附近摆动（$i=1, 2, \cdots, k$），因此，可用概率p_i代替频率$f_n(x_i)$，产生和式$\sum_{i=1}^{k}x_ip_i$. 由此引出离散型随机变量X的数学期望（或均值）.

一、离散型随机变量的数学期望的定义

定义 1 设离散型随机变量X的概率分布为$P\{X=x_i\}=p_i$（$i=1，2，\cdots$），若级数$\sum_i x_ip_i$绝对收敛，即$\sum_i|x_i|p_i$收敛，则称$\sum_i x_ip_i$为离散型随机变量X的数学期望（或均值），简称期望，记作$E(X)$，即

$$E(X)=\sum_i x_ip_i.$$

期望的定义表明，期望就是随机变量X的取值x_i以它们的概率为权的加权平均，从这个意义上说，把$E(X)$称为X的均值更能反映这个概念的本质.

例 2 盒中有 5 个球，其中 3 个黑球，2 个白球，现从中任取 2 个球，求取得黑球数的期望.

解 用X表示取到的黑球数，则X所有可能取的值为 0，1，2，其分布列为

X	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

于是

$$E(X)=0×0.1+1×0.6+2×0.3=1.2.$$

例 3 甲、乙两人进行打靶，所得分数分别记为X_1，X_2，它们的分布列分别为

X_1	0	1	2
p	0.1	0.2	0.7

X_2	0	1	2
p	0.6	0.3	0.1

试评定他们的成绩的好坏.

解 $E(X_1)=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.7=1.6$（分），

$E(X_2)=0\times0.6+1\times0.3+2\times0.1=0.5$（分）.

这意味着，如果进行很多次射击，那么，甲所得分数的平均值接近 1.6 分，而乙的接近 0.5 分，很明显，乙的成绩远远不如甲的成绩.

例 4 某人每次射击命中目标的概率为 0.8，现连续向一个目标射击，直到第一次命中目标为止，求射击次数的期望.

解 用 X 表示直到第一次命中目标为止时的射击次数，则 X 所有可能取值为 1，2，3，⋯.

$X=1$ 意味着第一次射击命中目标，则 $P\{X=1\}=0.8$，

$X=2$ 意味着第一次未命中目标，第二次射击命中目标，则 $P\{X=2\}=0.2\times0.8$.

一般地，$X=k$ 意味着前 $k-1$ 次未命中目标，第 k 次命中目标，则 $P\{X=k\}=0.2^{k-1}\times0.8$，于是

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\times P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\times0.2^{k-1}\times0.8$$
$$=0.8\times(1+2\times0.2+3\times0.2^2+\cdots+k\times0.2^{k-1}+\cdots),$$

记

$$A=1+2\times0.2+3\times0.2^2+\cdots+k\times0.2^{k-1}+\cdots,$$

则

$$0.2A=0.2+2\times0.2^2+3\times0.2^3+\cdots+k\times0.2^k+\cdots,$$
$$A-0.2A=1+0.2+0.2^2+0.2^3+\cdots+0.2^k+\cdots,$$

右端是公比为 0.2 的等比级数，于是

$$A-0.2A=0.8A=\frac{1}{1-0.2}=1.25,$$

从而 $A=1.25^2$.

$$E(X)=0.8\times1.25^2=1.25.$$

注：若每次射击命中目标的概率为 p，则

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=\frac{1}{p}.$$

二、几种常见的离散型随机变量的期望

1．两点分布

设 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的两点分布，即

X	0	1
p	$1-p$	p

则

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

2．二项分布

设 $X \sim B(n, p)$，其概率分布为

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n),$$

则

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)},
\end{aligned}$$

令 $m=k-1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{m} p^{m}(1-p)^{n-1-m} = \left[p+(1-p)\right]^{n-1} = 1 .$$

从而

$$E(X)=np .$$

二项分布的期望是 np，直观上也比较容易理解这个结果．因为 X 是 n 次试验中某事件 A 出现的次数，它在每次试验时出现的概率为 p，那么 n 次试验中当然平均出现 np 次了．

3．泊松分布

设 $X \sim P(\lambda)$，概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, \lambda>0),$$

则

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

令 $m=k-1$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}}{m!} = \mathrm{e}^{\lambda},$$

从而

$$E(X)=\lambda .$$

这表明，在泊松分布中，参数 λ 是它的数学期望．

3.1.2 连续型随机变量的数学期望

一、连续型随机变量的数学期望的定义

定义 2 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积

分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$的值为随机变量$X$的期望，记为$E(X)$，

即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x .$$

例 5 设在规定时间段内，某电气设备用于最大负荷的时间X（单位：min）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\ 500^2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\ 500,\\ \dfrac{-1}{1\ 500^2}(x-3\ 000), & 1\ 500<x\leqslant 3\ 000,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求最大负荷的平均时间.

解 最大负荷的平均时间即为X的数学期望，故

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{1\ 500} x\frac{x}{1\ 500^2}\mathrm{d}x+\int_{1\ 500}^{3\ 000} x\frac{-1}{1\ 500^2}(x-3\ 000)\mathrm{d}x\\&=1\ 500\ (\text{min}).\end{aligned}$$

所以，最大负荷的平均时间为1500min.

例 6 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，求$E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，

使用分部积分法，可得$E(X)=0$.

二、常见的连续型随机变量的数学期望

1．均匀分布

设$X\sim U[a,b]$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则

$$E(X)=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b).$$

2．指数分布

设X服从参数为λ的指数分布$E(\lambda)$，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\ (\lambda>0),$$

则

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

3．正态分布

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,$$

作变量代换，令$t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu,$$

从而

$$E(X)=\mu.$$

这说明，在正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中，参数μ是该分布的期望.

3.1.3 随机变量函数的数学期望

在实际问题中，有时我们所面临的问题涉及一个或多个随机变量的函数．例如，在一个系统中装有3个电子元件，每个电子元件的使用寿命是一个随机变量，该系统的使用寿命就是这些随机变量的函数．如果我们要求电子系统的平均使用寿命，就归结为计算随机变量函数的期望.

定理 3.1 设$g(x)$是连续函数，Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$.

（1）X是离散型随机变量，概率分布为$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$，若$\sum_i |g(x_i)|p_i$收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i;$$

（2）X是连续型随机变量，概率密度为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)dx$收敛，则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx.$$

定理3.1的证明从略，但从期望的定义不难理解这个定理的正确性.

定理3.1的重要性在于它提供了计算随机变量X的函数$g(X)$的期望的一个简便方法：不需要先求$g(X)$的分布，而直接利用X的分布．因为有时候，求$g(X)$的分布并不容易.

例 7 设X的分布列为

X	−2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求$E(X)$，$E(X^2)$.

解 $E(X)=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$，

$E(X^2)=(-2)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+2^2\times 0.3=2.8$.

例 8 已知X服从$[0,2\pi]$上的均匀分布，求$E(X^2)$，$E(\sin X)$.

解 X的概率密度$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}(-\cos x)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

例 9 设X服从参数为 1 的指数分布$E(1)$，求$E(X^2)$，$E\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}X}\right)$.

解 X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2,$$

$$E\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}X}\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{d}x=3.$$

3.1.4 数学期望的性质

数学期望具有下列性质（设所涉及到的随机变量的数学期望都存在）：

性质 1 设C为常数，则$E(C)=C$；

性质 2 设k为常数，则$E(kX)=kE(X)$；

性质 3 设X，Y均为随机变量，则$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

对于任意n个随机变量X_1，X_2，⋯，X_n，也有

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n).$$

性质 4 设X，Y均为随机变量且相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$.

对于n个相互独立的随机变量X_1，X_2，⋯，X_n，也有

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n).$$

例 10 将一枚均匀的骰子连掷 10 次，求所得点数之和的数学期望.

解 设X_i是第i次掷骰子时所得的点数（$i=1$，2，⋯，10），则掷 10 次骰子所得点数之和为

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10},$$

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10}).$$

对每个X_i，所有可能取的值为 1，2，3，4，5，6，由于骰子是均匀的，因此取每个可能

值的概率均为$\frac{1}{6}$，于是对$i=1$，2，…，10，

$$E(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5,$$

$$E(X)=10\times3.5=35.$$

例 11 证明：若X，Y均为随机变量且相互独立，则$E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]=0$.

证 因为X，Y相互独立，所以$E(XY)=E(X)E(Y)$，

从而

$$\begin{aligned}&E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]\\&=E\left[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)\right]\\&=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=0.\end{aligned}$$

证毕.

3.2 随机变量的方差

3.2.1 方差的概念

方差是随机变量的另一数字特征，它刻画了随机变量的取值在其中心位置附近的分散程度，也就是随机变量与平均值的偏离程度．设随机变量X的数学期望是$E(X)$，偏离量$X-E(X)$本身也是随机的，为刻画偏离程度的大小，不能使用$X-E(X)$，因为其值为零，即正负偏离彼此抵消了．为避免正负偏离彼此抵消，可以使用$E\{|X-E(X)|\}$作为描述X取值分散程度的数字特征，称之为X的平均绝对差，由于在数学上绝对值的处理不方便，因此常用$[X-E(X)]^2$的平均值$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$度量$X$与$E(X)$的偏离程度，这个平均值就是方差.

一、方差的定义

定义 1 设X为一随机变量，如果$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称之为$X$的方差，记为$D(X)$或$\mathrm{var}(X)$，即

$$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\},$$

并称$\sqrt{D(X)}$为X的标准差或均方差.

注意到$D(X)$是X的函数$[X-E(X)]^2$的期望，令$g(X)=[X-E(X)]^2$，利用定理 3.1 就可以方便地计算$D(X)$.

例如，对离散型随机变量X，若其概率分布为$P\{X=x_i\}=p_i$（$i=1$，2，…），

则

$$D(X)=\sum_i[x_i-E(X)]^2p_i;$$

对连续型随机变量 X，若其概率密度为 $f(x)$，则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x .$$

二、计算方差的重要公式

利用期望的性质，有

$$\begin{aligned}D(X)&=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\&=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2,\end{aligned}$$

即

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 .$$

因此可以按下列步骤计算方差:

（1）计算 $E(X)$： $E(X)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i p_i, & X\text{ 为离散型随机变量},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型随机变量},\end{cases}$

（2）计算 $E(X^2)$： $E(X^2)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i^2 p_i, & X\text{ 为离散型随机变量},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型随机变量},\end{cases}$

（3）计算 $D(X)$： $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

例 1 设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
p	0.2	0.5	0.3

求 $D(X)$.

解 $E(X)=0\times0.2+1\times0.5+2\times0.3=1.1$，

$E(X^2)=0^2\times0.2+1^2\times0.5+2^2\times0.3=1.7$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.7-1.1^2=0.49$.

例 2 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解 $E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$，

$$E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

例 3 设在规定的时间段内，某电气设备用于最大负荷的时间 X（单位：min）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{150^2}x, & 0\leqslant x\leqslant 150,\\ \dfrac{-1}{150^2}(x-300), & 150<x\leqslant 300,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求最大负荷的方差 $D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{150}x\frac{x}{150^2}\mathrm{d}x+\int_{150}^{300}x\frac{-1}{150^2}(x-300)\mathrm{d}x$$

$$=150,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{150}x^2\frac{x}{150^2}\mathrm{d}x+\int_{150}^{300}x^2\frac{-1}{150^2}(x-300)\mathrm{d}x$$

$$=262\ 500,$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=262\ 500-150^2=26\ 100.$$

例 4 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$（$-\infty<x<+\infty$），求 $D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,$

利用分部积分法，可得 $E(X)=0$.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2,$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=2.$$

三、几种常见的随机变量的方差

1．两点分布

设 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的两点分布 $B(1,p)$，即

X	0	1
p	$1-p$	p

则

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p,$$

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

2．二项分布

设 $X\sim B(n,p)$，其概率分布为

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n),$$

从而

$$E(X)=np,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2+np\ （过程略）,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np(1-p).$$

3．泊松分布

设 $X\sim P(\lambda)$，概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\cdots,\lambda>0),$$

则

$$E(X)=\lambda,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda^2+\lambda\ （过程略）,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda.$$

这表明，在泊松分布中，它的唯一参数 λ 既是它的数学期望又是它的方差.

4．均匀分布

设 $X\sim U[a,b]$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则

$$E(X)=\int_a^b\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b),$$

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2),$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

5．指数分布

设 X 服从参数为 λ 的指数分布 $E(\lambda)$，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\ (\lambda>0),$$

则

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},$$
$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2},$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

6．正态分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),$$

则

$$E(X)=\mu,$$
$$E(X^2)=\mu^2+\sigma^2,$$
$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2\ （过程略）.$$

3.2.2 方差的性质

方差具有以下重要性质:

性质 1 设 C 为常数，则 $D(C)=0$；

证 $D(C)=E\left\{[C-E(C)]^2\right\}=0$.

性质 2 设 C 为常数，则 $D(X+C)=D(X)$；

证
$$\begin{aligned}D(X+C)&=E\left\{[(X+C)-E(X+C)]^2\right\}\\&=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\&=D(X).\end{aligned}$$

性质 3 设 k 为常数，则 $D(kX)=k^2D(X)$；

证
$$\begin{aligned}D(kX)&=E\left\{[kX-E(kX)]^2\right\}\\&=k^2E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\&=k^2D(X).\end{aligned}$$

性质 4 设随机变量 X，Y 相互独立且方差 $D(X)$，$D(Y)$ 都存在，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

证 因为 X，Y 相互独立，所以 $E(XY)=E(X)E(Y)$，而

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=E\{(X+Y)-E(X+Y)\}^2\\&=E\{X-E(X)+Y-E(Y)\}^2\\&=E\{(X-E(X)\}^2+E\{Y-E(Y)\}^2+2E\{(X-E(X)(Y-E(Y)\}\end{aligned}$$

$$= D(X) + D(Y) + 2E\{(XY + E(X)E(Y) - XE(Y) - YE(X)\}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2\{E(XY) - E(X)E(Y)\}$$
$$= D(X) + D(Y).$$

又因为

$$D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + D(Y),$$

所以

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y). \text{ 证毕.}$$

对于 n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$，也有

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

例 5 设随机变量 $X \sim B(10, 0.1)$，$Y = 3X - 5$，求 $E(Y), D(Y)$.

解 $n = 10,\ p = 0.1,\ 1 - p = 0.9$，

$$E(X) = np = 10 \times 0.1 = 1,$$
$$D(X) = np(1 - p) = 10 \times 0.1 \times 0.9 = 0.9,$$

所以

$$E(Y) = E(3X - 5) = 3E(X) - 5 = 3 \times 1 - 5 = -2,$$
$$D(Y) = D(3X - 5) = 3^2 D(X) = 9 \times 0.9 = 8.1.$$

例 6 已知随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，且 $D(X) > 0$，设随机变量 $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$，试证明 $E(X^*) = 0,\ D(X^*) = 1$.

证 利用数学期望和方差的性质，

$$E(kX + C) = kE(X) + C,$$
$$D(kX + C) = k^2 D(X),$$

并注意到 $E(X)$，$D(X)$ 均为常数，

$$E(X^*) = E\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = 0,$$

$$D(X^*) = D\left[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right] = \frac{D[X - E(X)]}{D(X)} = \frac{D(X)}{D(X)} = 1.$$

例 7 已知随机变量 X, Y 相互独立且分别服从 $B(10, 0.1)$ 和 $N(-1, 2^2)$，求 $Z = 3X - 2Y$ 的方差.

解 $D(X) = 10 \times 0.1 \times 0.9 = 0.9$，$D(Y) = 2^2 = 4$，

所以

$$D(Z) = D(3X) + D(-2Y)$$
$$= 9D(X) + 4D(Y)$$
$$= 9 \times 0.9 + 4 \times 4$$
$$= 24.1.$$

例 8 运用随机变量的数学期望与方差的性质，求二项分布 $B(n, p)$ 的数学期望与方差.

解 设事件 A 在一重伯努利试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，于是它在 n 重伯努利试验中发生的次数 X 服从 $B(n,p)$.

另设 A 在第 i 重伯努利试验中发生的次数为 X_i($i=1, 2, \cdots, n$)，则 X_i 服从以 p 为参数的两点分布．故 $E(X_i)=p$，$D(X_i)=p(1-p)$.

又 $$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,$$

于是 $$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np\ .$$

注意到 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 相互独立，

所以

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p)\ .$$

本例所采用的解法，其巧妙之处在于借助了随机变量分解的手段化繁为简，这是概率论独特思维方式的体现.

3.3* 矩、协方差和相关系数

3.3.1 矩的概念

矩是具有广泛意义的数字特征，是随机变量某种特殊函数的数学期望．在数理统计等领域具有多方面的应用.

1．原点矩

定义 1 设 X 为随机变量，对于正整数 k ，若 $E(X^k)$ 存在，则称它为 X 的 k 阶原点矩.

显然当 $k=1$ 时，一阶原点矩就是数学期望 $E(X)$ ；当 $k=2$ 时, 二阶原点矩就是 $E(X^2)$.

设 $E(X^k)$ 存在，由定理 3.1 得：

（1）若 X 为离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i$($i=1, 2, \cdots$)，

则 $$E(X^k)=\sum_{i}x_i^k p_i\ ;$$

（2）若 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，

则 $$E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)\mathrm{d}x\ .$$

2．中心矩

定义 2 设 X 为随机变量，对于正整数 k ，若 $E\left[X-E(X)\right]^k$ 存在，则称它为 X 的 k 阶中心矩.

显然，一阶中心矩为 $E\left[X-E(X)\right]$ 恒为零；二阶中心矩为 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$，即方差 $D(X)$.

3.3.2 协方差和相关系数

1．协方差

对于随机变量X，Y，除了讨论X与Y的数学期望和方差外，还要讨论X与Y之间的关系．

若X与Y独立，则

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)=0 .$$

这意味着$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)\neq 0$时，$X$，$Y$不独立，由此可以用$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$来刻画$X$与$Y$之间的关系．

定义 3 设X与Y为随机变量，若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称它为随机变量X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} .$$

协方差的计算常采用下面的公式

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) .$$

协方差具有下列性质：

（1）$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；

（2）$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$，其中$a$，$b$为常数；

（3）$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$；

（4）$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$；

（5）$E(XY)=E(X)E(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y)$；

（6）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$．

例 1 已知X，Y为随机变量，且$D(X)=5$，$D(Y)=3$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=1$，试求$D(-2X+4Y-3)$．

解

$$\begin{aligned}D(-2X+4Y-3)&=D(-2X+4Y)\\&=D(-2X)+D(4Y)+2\mathrm{Cov}(-2X,4Y)\\&=(-2)^2D(X)+4^2D(Y)+2\times(-2)\times4\,\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=20+48-16=52.\end{aligned}$$

2．相关系数

定义 4 若$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，则称随机变量X与Y不相关．

若X与Y相互独立，则X与Y不相关．但不相关的随机变量却不一定是相互独立的．

定义 5 设X与Y为随机变量，协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$存在，且$D(X)>0$，$D(Y)>0$，则

$$\rho_{xy}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量X与Y的相关系数或标准协方差．

显然，相关系数为一个无量纲的量．它反映了随机变量X与Y之间的相关程度．

相关系数ρ_{xy}具有如下的重要性质：

（1）$|\rho_{xy}|\leqslant 1$；

（2）$|\rho_{xy}|=1$ 的充要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$，a，b 为常数；

（3）$\rho_{xy}=\rho_{yx}$.

相关系数 ρ_{xy} 反映了随机变量 X 与 Y 的线性相依程度，如果 $\rho_{xy}\neq 0$，则 X 与 Y 相关；如果 $\rho_{xy}=0$，则 X 与 Y 不相关；若 $\rho_{xy}=\pm 1$，则 X 与 Y 有线性关系.

（4）对随机变量 X 与 Y，下面的事实是等价的：

① X 与 Y 不相关；

② $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

③ $\rho_{xy}=0$；

④ $E(XY)=E(X)E(Y)$；

⑤ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

例 2　设 X 与 Y 为随机变量，已知 $E(X)=1,\ D(X)=9;\ E(Y)=0,\ D(Y)=16$，$\rho_{xy}=-\dfrac{1}{2}$. 另设 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，试求：（1）随机变量 Z 的数学期望 $E(Z)$ 与方差 $D(Z)$；（2）随机变量 X 与 Z 的相关系数 ρ_{xz}.

解　（1）$E(Z)=\dfrac{1}{3}E(X)+\dfrac{1}{2}E(Y)=\dfrac{1}{3}$，

$$\begin{aligned}D(Z)&=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)\\&=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^2D(X)+\left(\frac{1}{2}\right)^2D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\rho_{xy}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=3.\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y\right)\\&=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-6)=0,\end{aligned}$$

又 $D(X)=9>0,\ D(Y)=16>0$，所以，随机变量 X 与 Z 的相关系数 $\rho_{xz}=0$.

本章小结

一、常见随机变量的数学期望与方差（见下表）

常见分布的数学期望与方差

分布名称	简略记法	分布列或概率密度	数学期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
两点分布	$B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1;\ 0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n,p)$	$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1,2,\cdots,\ n$; $0<p<1$，n（自然数）为参数	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$；$\lambda>0$ 为参数	λ	λ
均匀分布	$U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $b>a$ 为参数	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$f(x)==\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\lambda>0$ 为参数	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<+\infty$； $-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$ 为参数	μ	σ^2

二、随机变量的数学期望

1．离散型随机变量的数学期望

若随机变量 X 的分布列为 $P\{X=x_i\}=p_i$（$i=1,2,\cdots$），且 $\sum\limits_i x_i p_i$，$\sum\limits_i x_i^2 p_i$，$\sum\limits_i g(x_i)p_i$ 绝对收敛，又 $Y=g(X)$，则

$$E(X)=\sum_i x_i p_i;$$

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i;$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i.$$

2．连续型随机变量的数学期望

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，又 $Y=g(X)$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x;$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x;$$

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

3．数学期望的性质（设所涉及到的随机变量的数学期望都存在）

性质 1　C 为常数，则 $E(C)=C$；

性质 2　设 k 为常数，则 $E(kX)=kE(X)$；

性质 3　设 X，Y 均为随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

性质 4　设 X，Y 均为随机变量且相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

三、随机变量的方差

1．方差的计算公式

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\};$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2.$$

2．方差的一般计算步骤

（1）计算 $E(X)$： $E(X)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i p_i, & X\text{ 为离散型随机变量,}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型随机变量;}\end{cases}$

（2）计算 $E(X^2)$： $E(X^2)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i^2 p_i, & X\text{ 为离散型随机变量,}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型随机变量;}\end{cases}$

（3）计算 $D(X)$： $D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$.

3．方差的性质

性质 1　设 C 为常数，则 $D(C)=0$；

性质 2　设 C 为常数，则 $D(X+C)=D(X)$；

性质 3　设 k 为常数，则 $D(kX)=k^2D(X)$；

性质 4　设随机变量 X，Y 相互独立且方差 $D(X)$，$D(Y)$ 都存在，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

四、矩、协方差与相关系数

1．矩

原点矩　对于正整数 k，若 $E(X^k)$ 存在，则称它为 X 的 k 阶原点矩.

（1）若 X 为离散型随机变量，概率分布为 $P\left\{X=x_i\right\}=p_i(\,i=1, 2, \cdots)$，则 $E(X^k)=$

$\sum_i x_i^k p_i$；

（2）若 X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则 $E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$.

中心矩 设 X 是随机变量，对于正整数 k，若 $E[X-E(X)]^k$ 存在，则称它为 X 的 k 阶中心矩．一阶中心矩为 $E[X-E(X)]$ 恒为零；二阶中心矩为 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$，即方差 $D(X)$.

2．协方差

设 X 与 Y 为随机变量，$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称它为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

协方差的计算常采用下面的公式

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

协方差具有下列性质:

（1）$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；

（2）$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$，其中 a，b 为常数;

（3）$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$；

（4）$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$；

（5）$E(XY)=E(X)E(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y)$；

（6）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

3．相关系数

若 X 与 Y 为随机变量，协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 存在，且 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，则 $\rho_{xy}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 称为随机变量 X 与 Y 的相关系数或标准协方差.

相关系数 ρ_{xy} 具有如下的重要性质:

（1）$|\rho_{xy}|\leqslant 1$；

（2）$|\rho_{xy}|=1$ 的充要条件是 $P\{Y=aX+b\}=1$，a，b 为常数;

（3）$\rho_{xy}=\rho_{yx}$.

相关系数 ρ_{xy} 反映了随机变量 X 与 Y 的线性相依程度，如果 $\rho_{xy}\neq 0$，则 X 与 Y 相关；如果 $\rho_{xy}=0$，则 X 与 Y 不相关；若 $\rho_{xy}=\pm 1$，则 X 与 Y 有线性关系.

（4）对随机变量 X 与 Y，下面事实是等价的:

① X 与 Y 不相关;

② $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

③ $\rho_{xy}=0$；

④ $E(XY)=E(X)E(Y)$；

⑤ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

习题三

1．已知随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{10} \quad (k=2, 4, \cdots, 18, 20)$$

求 $E(X)$.

2．袋中有 5 个乒乓球，编号为 1，2，3，4，5，现从中任取 3 个，用 X 表示取出的 3 个球中的最大编号，求 $E(X)$, $D(X)$.

3．一批零件中有 9 个合格品与 3 个废品，安装机器时，从这批零件中任取一个．如果取出的是废品就不再放回去，求在取得合格品之前已取出的废品数的数学期望．

4．射击比赛，每人射 3 次（每次一发），约定全部不中得 0 分，只中一弹得 15 分，中两弹得 55 分，中三弹得 100 分．甲每次射击命中率为 $\frac{3}{5}$，问他期望能得多少分?

5．某人有 5 发子弹，射击一次（每次一发），命中率为 0.9，现连续向同一目标射击，直到击中目标或子弹用尽为止，求其耗用子弹数 X 的数学期望 $E(X)$.

6．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1, \\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

求 $E(X)$.

7．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$, $D(X)$.

8．设随机变量 X 的分布列为

X	0	a	4	5
p	0.4	0.2	0.1	b

已知 $E(X^2)=10.9$, $a>0$，求 a 和 b.

9．设随机变量 X 的分布列为

X	−1	0	1	2
p	0.4	0.2	0.1	0.3

求 $E(X)$， $E(2-3X)$， $E(X^2)$, $E(3X^2-X+5)$.

10．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

求 $E(2X)$，$E(e^{-2X})$.

11．某车间生产的圆盘其直径在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，试求圆盘面积的数学期望.

12．一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年内损坏可予以调换．若工厂售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元．试求厂方出售一台设备净盈利的数学期望.

13．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2}{8}, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $E(X)$，$D(X)$，$E\left(\frac{1}{X^2}\right)$.

14．盒中共有 5 个球，3 个白色的，2 个黑色的．从中任取两个，求抽得的白球数 X 的方差 $D(X)$.

15．设随机变量 X 服从 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的均匀分布，又 $Y=\sin X$，求 $E(Y)$，$D(Y)$.

16．设 $X \sim N(1,2^2)$，$Y=-2X+3$，求 $E(X^2)$，$D(Y)$.

17．已知 $E(X)=30$，$D(X)=11$，$Y=\frac{1-X}{3}$，求 $E(X^2)$，$E(Y)$，$D(Y)$.

18．设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，且已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，求 λ 的值.

19．已知 $X \sim B(100,0.1)$，$Y \sim N(-1,2^2)$，$D(X+Y)=15$，求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{xy} 及 $\mathrm{Cov}(2X,-3Y)$，$E(XY)$.

自测题三

一、填空题

1．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+4x-4}$ $(-\infty<x<+\infty)$，则 $E(X)=$________，$D(X)=$________.

2．设 $E(X)=5$，$D(X)=3$，则 $E(2X+1)=$________，$D(-2X+10)=$________.

3．若 $X \sim B(50,0.2)$，则 $E(X)=$________，$D(X)=$________.

4．若 $X \sim P(5)$，则 $E(X)=$________，$D(X)=$________.

5．已知 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ （$-\infty<x<+\infty$），则 $E(X)=$__________，$D(X)=$__________.

6．已知随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5，$E(X)=E(Y)=0$，$E(X^2)=E(Y^2)=2$，则 $E\left[(X+Y)^2\right]=$__________.

7．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，则 $\dfrac{E(X)}{D(X)}=$__________.

8．设随机变量 $X\sim N(a,1^2)$，若 $E(X^2)=1$，则 $a=$__________.

9． X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，则 $E(X)=$__________， $D(X)=$__________.

10．设 $X\sim N(3,2^2)$，则 $D(2-3X)=$__________， $E(2+3X^2)=$__________.

二、单选题

1．已知 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$， $D(X)=1.44$，则 n，p 的值为（　　）

A． $n=4$，$p=0.6$；　　B． $n=6$，$p=0.4$；

C． $n=3$，$p=0.8$；　　D． $n=8$，$p=0.3$.

2．已知 $X\sim B(100,0.1)$，则 $D(X)$ 为（　　）

A．9；　　B．10；　　C．90；　　D．120.

3．已知 $X\sim N(10,2^2)$，则 $D(3X+1)=$（　　）

A．9；　　B．4；　　C．36；　　D．37.

4．若随机变量 X 的 $E(X)=3$， $D(X)=4$，则 $E(X^2)=$（　　）

A．7；　　B．1；　　C．13；　　D．5.

5．设随机变量 X 的方差 $D(X)$ 存在， $Y=aX+b$（a，b 为常数），则（　　）

A． $D(X)=D(Y)$；　　B． $D(Y)=aD(X)$；

C． $D(Y)=a^2D(X)$；　　D． $D(Y)=a^2D(X)+b$.

6．设 $X\sim N(3,2^2)$，$Y\sim E(0.2)$，则下列式子错误的是（　　）

A． $E(X+Y)=8$；　　B． $D(X+Y)=29$；

C． $E(X^2+Y^2)=63$；　　D． $E\left(\dfrac{X}{2}+\dfrac{Y}{5}-\dfrac{5}{2}\right)=0$.

7．如果随机变量 X 服从（　　）上的均匀分布，则 $E(X)=3$，$D(X)=\dfrac{4}{3}$

A．$[0,6]$；　　B．$[1,5]$；　　C．$[-3,3]$；　　D．$[2,4]$.

三、计算题

1．已知随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1	5
p	0.2	0.3	0.1	0.4

求：$E(X)$，$E(2-3X)$，$E(X^2)$，$D(X)$．

2．一口袋中有红球 3 个，白球 4 个，从中任取 5 个，求取出的 5 个球中所含白球数 X 的数学期望与方差．

3．已知某人射击的命中率为 0.8，试求：（1）此人射击一次的平均命中次数；（2）此人独立射击四次的平均命中次数．

4．设 X 为连续型随机变量，且概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(X^2)$，$D(X)$．

5．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对 X 独立重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望．