第 3 章　不定积分

微分学的基本问题是：已知一个函数，求它的导数．但是，在科学技术领域中往往还会遇到与此相反的问题：已知一个函数的导数，求原来的函数，由此产生了积分学，积分学由两个基本部分组成：不定积分和定积分．本章主要研究不定积分的概念、性质和基本积分方法．

本章学习目标

- 理解原函数与不定积分的概念．
- 了解积分与微分之间的关系．
- 掌握不定积分的几何意义及性质．
- 熟记积分基本公式．
- 求不定积分的方法：直接积分法、第一换元法、第二换元法、分部积分法．
- 了解简单的有理分式函数的不定积分．

§3.1　原函数与不定积分

一、原函数的概念

已知变速直线运动的方程 $s=s(t)$，求它的瞬时速度问题实质上是求已知函数的导数问题；反过来，如果已知直线运动在任一时刻的速度 $v=v(t)$，求它的运动规律 $s(t)$．这类问题实质上就是已知一个函数的导数要求原来的函数，这就形成了原函数问题．下面我们一起来看一下原函数的概念．

定义 3.1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个函数 $F(x)$，使得对于任何一个 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数．

例如，对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的每一个点 x，有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x$，这时我们称函数 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数，不难验证 $\sin x+1$、$\sin x+2$、$\sin x+c$ 都是 $\cos x$ 的原函数．由上述情况，我们是否能得到这样一个结论：如果一个函数的原函数存在，那么必有无穷多个原函数，而且这些函数之间仅相差一个常数．我们用下面的这个定理来回答这个问题．

定理 3.1.1（原函数存在定理）　若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

（1） $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，其中 C 是任意常数．

（2） $f(x)$ 的任意两个原函数之间相差一个常数.

可以证明：凡在区间 I 上连续的函数都有原函数. 由于初等函数是连续函数，因此初等函数在其定义区间上都有原函数.

二、不定积分的概念

定义 3.1.2　函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，其中 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，并且把 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的原函数的一般表达式，其中 C 取遍一切实数值，称它为积分常数.

例 3.1.1　求 $\int x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的一个原函数，即

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

例 3.1.2　求 $\int \sin x\mathrm{d}x$.

解　因为 $(-\cos x)' = \sin x$，所以 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，即

$$\int \sin x = -\cos x + C$$

当积分常数 C 变动时，不定积分表示的不是一个函数，而是一族函数. 从几何角度来看，他们代表一族曲线，我们通常称这族曲线为函数 $f(x)$ 的积分曲线，其中任何一条积分曲线都可以由某一条积分曲线沿 y 轴方向向上或向下平移适当的位置而得到. 另外，在积分曲线族上横坐标相同的点作切线，这些切线都是平行的（如图 3.1.1 所示），即它们的斜率都是相等的，均为函数 $f(x)$.

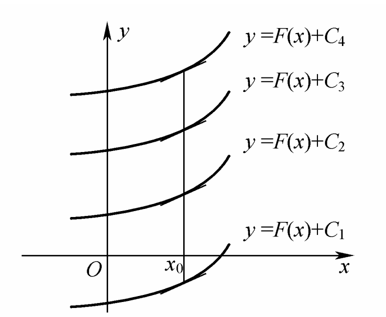

图 3.1.1

例 3.1.3　设某一曲线通过点 $(0,1)$，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的平方，求此曲线方程.

解　设所求曲线的方程为 $y = y(x)$，按题意有 $y' = x^2$，于是 $y = \frac{x^3}{3} + C$

因为此曲线通过点$(0,1)$，代入上式可得$C=1$.

故所求曲线的方程为$y=\dfrac{x^3}{3}+1$.

三、不定积分的性质

定理 3.1.2 若函数$f(x)$和$g(x)$在区间I上有原函数，则$kf(x)$（$k\neq 0$为常数）和$f(x)\pm g(x)$在I上也都有原函数，且

（1）$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$

（2）$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

由上述的定理，我们很容易将其推广到有限多个函数的线性组合的情形，即：

$$\int (c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)\mathrm{d}x=c_1\int f_1\mathrm{d}x+c_2\int f_2\mathrm{d}x+\cdots+c_n\int f_n\mathrm{d}x$$

四、不定积分的基本积分表

根据不定积分的定义，若$F'(x)=f(x)$，则$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，从而

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$$

又如果$f(x)$是可导函数，则对$f'(x)$求不定积分就有

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$$

把求导的基本公式反过来就得出积分的基本公式，列表如下：

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k为常数）

（2）$\int x^\mu\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq -1$）

（3）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$

（4）$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

（5）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

（6）$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

（7）$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

（8）$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

（9）$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

（10）$\int \sec x\cdot\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

（11）$\int \csc x\cdot\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

（12）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

（13）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$

基本积分公式是求积分运算的基础，读者一定要熟记.

五、直接积分法

我们现在可以利用上面讨论的基本积分公式和不定积分的性质来求解一些简单的积分.

例 3.1.4　求下列不定积分：

（1）$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（2）$\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

（3）$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$　　（4）$\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

（5）$\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$　　（6）$\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

解　（1）原式 $=\int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=\sqrt{x}\left(2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}x^2\right)+C$$

（2）原式 $=\int \frac{(1+x^2)x^2-(1+x^2)+2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(x^2-1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+2\arctan x+C$$

（3）原式 $=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x$$

$$=\tan x-x+C$$

（4）原式 $=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int \sec^2 x\ \mathrm{d}x+\int \csc^2 x\ \mathrm{d}x$$

$$=\tan x-\cot x+C$$

（5）原式=$\int \frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$

（6）原式 $=\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x-\sec x+C$$

习题 3.1

一、选择题

1．下列函数中，（　　）是 $\cos x$ 的原函数.

A． $\sin x$　　B． $-\sin x$　　C． $-\cos x$　　D． $\cos x$

2．若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A． $\ln|x|$　　B． $\frac{1}{x}$　　C． $-\frac{1}{x^2}$　　D． $\frac{2}{x^3}$

3．下列等式中（　　）是不正确的.

A． $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　B． $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

C． $[\int f(x)dx]'=f(x)$　　D． $\int \mathrm{d}x=x+C$

二、填空题

1． $\int \mathrm{d}\arctan\sqrt{x}$ =________.

2．若 $f'(x)=2x,\ f(1)=2$，则 $f(x)=$________.

3． $\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=$________.

三、求下列不定积分

（1） $\int 4a^2x^6\mathrm{d}x$（$a\neq 0$, a 是常数）　　（2） $\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

（3） $\int 5^t\mathrm{d}t$　　（4） $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

（5） $\int(3^x-5^x)^2\mathrm{d}x$　　（6） $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

（7） $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$

四、综合题

已知某曲线在任意点 x 处的切线斜率为 $2x$，且曲线经过点 $(0,1)$，求该曲线方程.

§ 3.2　换元积分法

求不定积分有两个主要方法：换元积分法和分部积分法. 本节讲换元积分法，换元积分法分为第一类换元积分法和第二类换元积分法.

一、第一类换元法（凑微分法）

换元积分法是通过积分变量的代换，使所求的积分化为能直接利用基本积分公式的方法. 我们先来看下面这个例题.

例 3.2.1　求 $\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x$.

分析：我们可以将被积函数看成是两个函数的乘积，即

$$\sin^3 x\cos x=(\sin^3 x)(\cos x)$$

一个函数 $\sin^3 x=f(\sin x)$ ，另一个函数 $\cos x$ 是 $\sin x$ 的导数，于是被积函数可写成如下形式：

$$\sin^3 x\cos x=f(\sin x)(\sin x)'$$

解　$$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int \sin^3\mathrm{d}(\sin x)\xlongequal[\text{令}u=\sin x]{\text{换元}}\int u^3\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\text{用积分公式}}\frac{1}{4}u^4+C\xlongequal[u=\sin x]{\text{还原}}\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

这种求不定积分的方法就是第一类换元积分法，本例用该方法的关键是被积函数具有形式 $f(\sin x)(\sin x)'$ ，若将函数 $\sin x$ 换成一般函数的形式 $\varphi(x)$ ，则被积函数应该具有形式 $f(\varphi(x))(\varphi(x))'$.

一般地，被积函数若具有 $f(\varphi(x))(\varphi(x))'$ 形式，则可用第一类换元积分法. 第一类换元积分法如下叙述：

定理 3.2.1　（第一类换元积分法）

设函数 $u=\varphi(x)$ 可导，若 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$ ，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\xlongequal{u=\varphi(x)}\int f(u)\mathrm{d}u\xlongequal{\text{积分}}F(u)+C$$

$$\xlongequal{\text{回代}}F[\varphi(x)]+C$$

例 3.2.2　求 $\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 我们发现被积函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ 可变形为 $f(x)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)'$，于是

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x=-\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^u+C=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+C$$

例 3.2.3 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\dfrac{2}{(1+\sqrt{x}^2)}(\sqrt{x})'$，则

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=2\arctan u+C=2\arctan\sqrt{x}+C$$

例 3.2.4 求 $\displaystyle\int \tan x\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $f(x)=\tan x=-\dfrac{1}{\cos x}(\cos x)'$，则

$$\int \tan x\mathrm{d}x=-\int \frac{\mathrm{d}u}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C$$

解题较熟练时，可以不写出换元过程.

例 3.2.5 求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int \sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x$　　（2）$\displaystyle\int \cos^2 x\mathrm{d}x$

（3）$\displaystyle\int \cos^4 x\mathrm{d}x$　　（4）$\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x$

（5）$\displaystyle\int \csc x\mathrm{d}x$　　（6）$\displaystyle\int \sec^4 x\mathrm{d}x$

解 （1）
$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x&=\int \sin^4 x\cos^4 x\mathrm{d}(\sin x)\\&=\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)\\&=\int \sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\mathrm{d}\sin x\\&=\int (\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x)\mathrm{d}(\sin x)\\&=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x)\\&=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C\end{aligned}$$

类似求出$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

（3）$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) + \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\mathrm{d}(2x) \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

（4）$$\begin{aligned}\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

（5）$$\begin{aligned}\int \csc x\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

由于$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$，所以原式还可以写成：

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

另解　$$\begin{aligned}\int \csc x\mathrm{d}x &= \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x}\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{(\csc x + \cot x)'\mathrm{d}x}{\csc x + \cot x} = -\ln|\csc x + \cot x| + C\end{aligned}$$

同理还可以求出：

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

（6）$\int \sec^4 x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}(\tan x) = \int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)$

$$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$$

例 3.2.6 求下列不定积分：

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ （$a\neq 0$） （2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ （$a\neq 0$）

（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ （$a>0$） （4）$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解 （1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

（2）$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C$$
$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

（4）$$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

例 3.2.7 求下列不定积分：

（1）$\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ （2）$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$

解 （1）$$\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}\ln(1+x^2)=\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C$$

（2）$$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})$$
$$=2\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

二、第二类换元法

定理 3.2.2（第二类换元法）　若函数 $x=\varphi(t)$ 在某个区间上满足：

（1）$\varphi'(t)$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$.

（2）$x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在.

（3）$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 有原函数 $G(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\mathrm{d}t=G(\varphi^{-1}(x))+C$$

第二类换元积分法就是把原积分变量 x 替换成 $x=\varphi(t)$，使积分转换成关于新变量 t 的积分，因此该法又称为变量替换法.

对积分引进适当的变量替换后，要同时做到“两换一还原”，两换是：一换被积函数，二换积分微元，缺一不可；一还原是积分结果还需要变量还原.

例 3.2.8　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解　令 $x=t^6$（$t>0$），则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}&=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}\\&=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln(1+t)\right)+C\\&=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C\end{aligned}$$

例 3.2.9　求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解　令 $x=a\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$， $\mathrm{d}x=a\cos t\ \mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x&=\int a\cos t\cdot a\cos t\ \mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t\\&=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\end{aligned}$$

例 3.2.10　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$（$a>0$）.

解　令 $x=a\tan t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$， $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\ \mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left|\ \sec t + \tan t\ \right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\ \right| + C \quad (C = C_1 - \ln a)$$

例 3.2.11 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ （$a>0$）.

解 令 $x = a\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$， $\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\ \right| + C \quad (C = C_1 - \ln a)$$

从上面后 4 个例子容易看到，当被积函数含有根式：$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 时，可以分别令 $x = a\sin t$， $x = a\tan t$， $x = a\sec t$，以消去根号，使被积表达式简化．这 3 种变换，通常称为三角代换．

下面的例子表明，换元法虽然也有些规律可循，但在具体运用时十分灵活．不定积分的求出在很大程度上依赖于我们的实际经验、运算技巧和机智．

例 3.2.12 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}$．

解法 1：令 $x = 2\sin t\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$原式 = \int \frac{2\cos t}{4\sin t\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \csc t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$$

解法 2：令 $x = \frac{1}{t}\left(t>\frac{1}{2}\right)$，则

$$\text{原式}=\int\frac{t^2}{\sqrt{4t^2-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\,2t+\sqrt{4t^2-1}\,\right|+C$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\,\right|+C$$

解法 3：令 $\sqrt{4-x^2}=t\quad(0<t<2)$，则 $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，

$$\text{原式}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$$

本例采用 3 种不同的方法换元，其结果形式虽然不同，但均可互相转化．此外，本例还可采用其他方法换元，如令 $x^2=\dfrac{1}{t}\ (t>\dfrac{1}{4})$，$\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=t\ (t>0)$ 等，从而进一步说明换元积分法的灵活性．我们只有在熟记基本公式的基础上，通过做大量的练习去积累经验，才能做到熟中求巧，运用自如．

习题 3.2

一、选择题

1．下列凑微分正确的是（　　）．

A．$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\cos x$　　　　B．$\sqrt{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sqrt{x}$

C．$\arcsin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　D．$2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^{x^2}$

2．求 $\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$ 时，经变量代换 $x=\tan t$，与此积分相同的是（　　）．

A．$\int\sec t\mathrm{d}t$　　　　B．$\int\sec^3 t\mathrm{d}t$

C．$\int\dfrac{\sec t}{1+t^2}\mathrm{d}t$　　　　D．$-\int\sec^3 t\mathrm{d}t$

二、填空题

1．在下列等号右端填入适当的系数，使等式成立：

$\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\dfrac{x}{2}$　　　　$x\mathrm{d}x=$ __________ $\mathrm{d}(x^2+1)$

$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(5+6\ln x)$　　$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\cos 2x\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\sin 2x)$　　$\frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{arctg}2x)$

$\frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\arcsin 4x)$　　$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

2．$F'(x)=f(x)$，则 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=$ ________.

三、求下列不定积分

（1）$\int(1-2x)^5\mathrm{d}x$　　（2）$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（4）$\int\frac{1+2\ln x}{x}\mathrm{d}x$

（5）$\int(\sin\pi x+1)\mathrm{d}x$　　（6）$\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（7）$\int\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$　　（8）$\int\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$

四、求下列不定积分

（1）$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

（3）$\int\frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$　　（4）$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x$

（5）$\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$　　（6）$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$

五、求下列不定积分

（1）$\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

§3.3　分部积分法

利用换元积分法可以求许多函数的不定积分．然而，还有许多不定积分，如 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$ 等都不能利用基本积分表和换元积分法计算．本节将讨论另一个求不定积分的基本方法——分部积分法．

定理 3.3.1　若函数$u(x)$与$v(x)$可导，且不定积分$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$存在，则$\int u(x)v'x\mathrm{d}x$也存在，并有

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

上式表明，把比较难求的$\int u\mathrm{d}v$化为比较容易求的$\int v\mathrm{d}u$来计算，可以化难为易.

例 3.3.1　求$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$

若令$u=\cos x$，则得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int \cos x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cos x+\int \frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$$

反而使所求积分更加复杂. 可见使用分部积分的关键在于被积表达式中的u和$\mathrm{d}v$的适当选择. 我们在应用分部积分法时，恰当地选取u和$\mathrm{d}v$是一个关键. 选取u和$\mathrm{d}v$一般要考虑以下两点：

（1）v要容易求得.

（2）$\int v\mathrm{d}u$要比$\int u\mathrm{d}v$容易积出.

例 3.3.2　求下列不定积分：

（1）$\int x\ln x\mathrm{d}x$　　（2）$\int \arccos x\mathrm{d}x$

（3）$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　（4）$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$

解　（1）
$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x&=\int \ln x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\int \arccos x\mathrm{d}x&=x\arccos x+\int x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x+C\end{aligned}$$

（4）
$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\mathrm{d}x&=\int x\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\sin 2x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$$

由以上例题我们总结出选u的一条准则，那就是“指三幂对反，谁在后谁为u”，即若被积函数是由指数函数、三角函数、幂函数、对数函数和反三角函数中的两种的乘积而构成，则可按准则中的顺序判断谁为u，如例 3.3.2（1）的被积函数就是由幂函数和对数函数的乘积而构成，此时对照准则中的前半句话得知：对数函数在幂函数后，所以就选对数函数为u.

例 3.3.3 求$\int\sec^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\int\sec x\mathrm{d}\tan x$

$$=\sec x\tan x-\int\tan x\cdot\sec x\tan x\mathrm{d}x$$
$$=\sec x\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec x\mathrm{d}x$$
$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\mathrm{d}x+\int\sec x\mathrm{d}x$$

所以$\int\sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

求不定积分有时需要兼用换元法与分部积分法.

例 3.3.4 求$\int x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

$$\int x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t^3\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2t^3\mathrm{e}^t-6\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$
$$=2t^3\mathrm{e}^t-6t^2\mathrm{e}^t+12\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$
$$=2t^3\mathrm{e}^t-6t^2\mathrm{e}^t+12t\mathrm{e}^t-12\mathrm{e}^t+C$$
$$=2(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$$

在以上两节求积分的例子中，我们曾多次把一些积分所得结果直接代入运算中作为公式应用，现在将这些结果汇总起来，作为对基本积分表的补充.

（14）$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln\left|\cos x\right|+C$.

（15）$\int\cot x\mathrm{d}x=\ln\left|\sin x\right|+C$.

（16）$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$.

（17）$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$.

（18）$\int\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

（19）$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

（20）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

（21）$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

（22）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

（23）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$.

（24）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

（25）$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

（26）$\int \sqrt{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$.

（27）$\int \sqrt{x^2 - a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

习题 3.3

一、选择题

1．下列分部积分中，u 和 v' 选择正确的有（　　）.

A．$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$，$u = x$，$v' = \cos 2x$　　B．$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$，$u = \cos 2x$，$v' = x$

C．$\int \ln x\mathrm{d}x$，$u = 1$，$v' = \ln x$　　D．$\int x^2\ln x\mathrm{d}x$，$u = x^2$，$v' = \ln x$

2．$\int x\mathrm{d}(\sin x) =$（　　）.

A．$x\sin x - \cos x + C$　　B．$x\sin x - \sin x + C$

C．$x\sin x + \cos x + C$　　D．$x\sin x + \sin x + C$

二、填空题

1．若 $uv = x\sin x$, $\int u'v\mathrm{d}x = \cos x + C$，则 $\int uv'\mathrm{d}x =$________.

2．设 $f(x) = \cos 2x$，则 $\int xf''(x)\mathrm{d}x =$________.

3．$\int \ln\frac{x}{2}\mathrm{d}x =$________．

三、计算下列不定积分

（1）$\int x\sin 2x\mathrm{d}x$　　（2）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

（3）$\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$　　（4）$\int \arcsin x\mathrm{d}x$

（5）$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$　　（6）$\int (x^2+2)\sin x\mathrm{d}x$

（7）设 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$ 的值．

（8）$\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$　　（9）$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

（10）$\int (x^2-1)\sin 2x\mathrm{d}x$　　（11）$\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

（12）$\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

*§3.4　有理函数的积分

前面我们介绍了不定积分两类重要的积分法——换元积分法和分部积分法．尽管积分（不定积分）是微分的逆运算，但积分运算要比微分运算困难得多．我们知道，任何一个初等函数只要可导，我们就一定能利用基本求导法则和基本导数公式求出它的导数．但是一个初等函数的积分，即使函数形式很简单，其积分计算却很复杂，很难计算出结果，甚至有的积分根本无法表达出来，因为它的原函数不再是初等函数了，如 $\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$、$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$、$\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ 等．然而在初等函数中有一类函数——有理函数，有理函数在理论上一定是可积的，也就是说有理函数的原函数一定是初等函数．下面我们就讨论有理函数的不定积分．

形如 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数称为有理分式函数．其中 $P(x)$、$Q(x)$ 是关于 x 的多项式函数．

设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^m+\cdots+b_1x+b_0$，其中 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$．

如果 $n\geqslant m$，则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理假分式；如果 $n<m$，则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式．

当 $n\geqslant m$ 时，根据多项式的带余除法有 $P(x)=g(x)Q(x)+r(x)$，其中，$r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(\mathrm{Q}(x))$．于是，$\frac{P(x)}{Q(x)}=g(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$．而 $\frac{r(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式．

综上所述，有如下结论：任一个有理分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$一定可以表示成一个多项式函数与一个有理真分式之和.

我们知道，多项式的不定积分是简单的，所以就能有效地解决有理真分式的不定积分问题. 这样，我们的问题就放到如何解决有理真分式的不定积分上来了.

对于有理真分式，我们有如下的概念和结论：

（1）部分分式的概念（也称简单分式）.

形如$\dfrac{A}{x-a}$，$\dfrac{A}{(x-a)^n}$，$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$及$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$的有理真分式称为部分分式，其中$x^2+px+q$是实数域上的不可约多项式（即$p^2-4q<0$）.

（2）任何一个有理真分式必能表示成一系列部分分式之和.

综上有：有理函数一定可以表示成多项式函数与部分分式之和.

于是，有理函数的不定积分最终归结到部分分式$\dfrac{A}{x-a}$，$\dfrac{A}{(x-a)^n}$，$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$，$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$的不定积分上来了.

（3）有理真分式表示成部分分式之和的基本方法.

在解决有理真分式不定积分之前，首先要解决如何把有理真分式表示成部分分式之和.

我们采用的基本方法称为待定系数法，具体步骤如下：

首先求出$Q(x)$的标准分解式，现假定$Q(x)$的标准分解式为：

$$Q(x)=b(x-\alpha_1)^{l_1}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}$$

再假设
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1l_1}}{(x-\alpha_1)^{l_1}}+\cdots$$
$$+\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_{12}x+D_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{1s_1}x+D_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\cdots$$

其中A_{11}，A_{12}，…，C_{11}，D_{11}，…，为待定系数.

然后等式右边进行通分，相加后把分子整理成一个多项式，比较等式两边分子同次项系数，得到一个线性方程组，最后解线性方程组，求出所有待定系数. 这样，该有理真分式就表示成部分分式之和了.

在分解过程中，要特别强调的是：如果$Q(x)$的标准分解式中有因式$(x-\alpha)^k$，那么在分解成部分分式的和的时候，和式中必须含有$\dfrac{A_1}{x-\alpha}$，$\dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2}$，…，$\dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$这$k$个部分分式，同样地，$Q(x)$的标准分解式中有因式$(x^2+px+q)^s$，那么在分解成部分分式的和的时候，和式中同样必须含有$\dfrac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}$，$\dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}$，…，$\dfrac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s}$这$s$个部分分式.

比如，把$\dfrac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^3(x^2+x+1)}$分解成部分分式之和.

设
$$\frac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^3(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{A(x+1)^2(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+C(x^2+x+1)+(Dx+E)(x+1)^3}{(x-1)^3(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{F(x)}{(x+1)^3(x^2+x+1)}$$

其中
$$F(x)=(A+D)x^4+(3A+B+3D+E)x^3+(4A+2B+C+3D+3E)x^2$$
$$+(3A+2B+C+D+3E)x+(A+B+C+E)$$

比较等式两边分子多项式同次项系数，由
$$3x^4+10x^3+16x^2+11x+3=(A+D)x^4+(3A+B+3D+E)x^3+(4A+2B+C+3D+3E)x^2$$
$$+(3A+2B+C+D+3E)x+(A+B+C+E)$$

得 $\begin{cases}A+D=3\\3A+B+3D+E=10\\4A+2B+c+3D+3E=16\\3A+2B+C+D+3E=11\\A+B+C+E=3\end{cases}$，解方程组$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-2\\C=1\\D=2\\E=3\end{cases}$

即
$$\frac{3x^4+10x^3+16x^2+11x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

下面我们来看部分分式的不定积分.

（1）$\displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}\mathrm{d}x=A\ln|x-\alpha|+C$

（2）$\displaystyle\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{1-n}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+C$ （n>1 的整数）

（3）$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\int\frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$
$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)+\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{p}{2}\right)$$
$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

（4）$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{2}\int\frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$$=\frac{A}{2(1-n)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1}{\left\{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\right\}^n}\mathrm{d}x$$

剩下来的积分问题就变成 $I_n=\int\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x$ 的积分了．这个积分我们用三角代换就可以很容易地解决.

这样，有理函数的不定积分问题就算完全得到解决了．下面来看几个具体的例题.

例 3.4.1　计算 $\int\frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

解　令 $\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$ ，则

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{x^2+3x+2}$$

所以 $\begin{cases}A+B=1\\2A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\end{cases}$

所以 $\int\frac{x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{-1}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{2}{x+2}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|+C$

例 3.4.2　计算 $\int\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}\mathrm{d}x$.

解　令 $\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+6}$ ，则

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}=\frac{A(x^2+4x+6)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+4x+6)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(6A+C)}{(x+1)(x^2+4x+6)}$$

即 $\begin{cases}A+B=0\\4A+B+C=2\\6A+C=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}$

所以　$\int\frac{2x+5}{(x+1)(x^2+4x+6)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{x+1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+6)'}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+6\right|+\int\frac{1}{2+(x+2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+6| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}} + C$$

例 3.4.3 计算$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1+(1+x)^2}{(1+(1+x)^2)^2}\mathrm{d}(x+1) - \int \frac{(1+x)^2}{(1+(1+x)^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{1}{1+(1+x)^2}\mathrm{d}(1+x) + \frac{1}{2}\int (1+x)\mathrm{d}\frac{1}{1+(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan(1+x) + \frac{1}{2}\frac{1+x}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(1+x)^2}\mathrm{d}(x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\arctan(1+x) + C$$

习题 3.4

计算下列不定积分：

（1）$\int \frac{x}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$ （2）$\int \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$

（3）$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$ （4）$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

（5）$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ （6）$\int \frac{x^3-3x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$

（7）$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\mathrm{d}x$ （8）$\int \frac{x^3}{x+2}\mathrm{d}x$

本章小结

1．原函数与不定积分的概念．

2．不定积分的几何意义（$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$ 表示 $f(x)$ 全部积分曲线所组成的积分曲线族）．

3．不定积分的性质：

（1）$(\int f(x)\mathrm{d}x)' = f(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}(\int f(x)\mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$

（2）$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C \Leftrightarrow \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$

（3）$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

（4）$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （$k\neq 0$ 的常数）.

4．基本积分公式应用.

5．第一类换元积分法（凑微分法）

（1）$\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x+b)=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$ （a、b 为常数 $a\neq 0$）

（2）$x^a\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a+1}\mathrm{d}(x^{a+1}+b)$ （a、b 为常数 $a\neq 0$ 且 $a\neq -1$）

（3）$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(a\ln x+b)$ （a、b 为常数 $a\neq 0$）

（4）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，$a^x\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}(a^x)}{\ln a}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）

（5）$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$，$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$

（6）$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，$\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$

（7）$\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$

（8）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$

6．第二类换元积分法，适用于以下 3 种情况：

（1）被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，这时可以设 $x=a\sin t$.

（2）被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，这时可以设 $x=a\tan t$.

（3）被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，这时可以设 $x=a\sec t$.

7．分部积分公式：$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$ （设 $u(x)$、$v(x)$ 可微，且 $u(x)v'(x)$ 和 $u'(x)v(x)$ 有原函数）.

8．分部积分选择 u、v' 的原则：

（1）由 v' 易求 v　　　（2）$\int v\mathrm{d}u$ 易积分

数学家简介——柯西

柯西，A. L.（Cauchy，Augustin－Louis）1789 年 8 月 21 日生于法国巴黎，1857 年 5 月 22 日卒于法国斯科。数学、数学物理、力学、复变函数论的奠基人。19 世纪，复变函数论逐渐成为数学的一个独立分支，柯西为此做了奠基性的工作。《分析教程》中有一半以上篇幅讨论复数与初等复函数，这表明柯西早就把建立复变函数论作为分析的一项重要工程。他以形式方法引进复数（“虚表示式”），定义其基本运算，得到这些运算的性质。他比照实的情形定义复无穷小与复函数

的连续性。柯西写于 1814 年的关于定积分的论文是他创立复变函数论的第一步。文中给出了所谓柯西－黎曼方程，讨论了改变二重积分的次序问题，提出了被积函数有无穷型间断点时主值积分的观念并计算了许多广义积分。柯西写于 1825 年的关于积分限为虚数的定积分的论文，是一篇力作。文中提出了作为单复变函数论基础的“柯西积分定理”。柯西本人用变分方法证明了这条定理，证明中曲线连续变形的思想可以说是“同伦”观念的萌芽。文中还讨论了被积函数出现一阶与 m 阶极点时广义积分的计算。残数演算术语“残数”首次出现于柯西在 1826 年写的一篇论文中。他认为残数演算已成为“一种类似于微积分的新型计算方法”，可以应用于大量问题。布里奥于 1859 年出版了《双周期函数论》，阐明了柯西理论的对象，系统阐述了复变函数论，对把柯西的观念传播到全欧洲起到了决定性作用，标志着单复变函数论正式形成。