第 7 章　常微分方程

高等数学研究的对象是函数，而函数关系一般是不能直接由实际问题得到的. 但根据实际问题的特性，有时可以得到表示未知函数及其导数或微分与自变量之间关系的式子，这种关系式揭示了实际问题的客观规律性，它是描述这种客观规律性的一种重要数学模型——微分方程.

本章学习目标

- 了解微分方程的定义（阶、解、通解、初始条件、特解）.
- 掌握可分离变量微分方程、齐次微分方程的解法.
- 熟练掌握一阶线性微分方程的解法.
- 了解二阶线性微分方程的解的结构.
- 掌握二阶线性常系数齐次、非齐次微分方程的解法.

§7.1　基本概念

利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题时，一般先要建立数学模型，再对数学模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论. 数学模型最常见的表达方式是包含自变量和未知函数的方程，在很多情况下未知函数的导数（或微分）也会在方程中出现，我们称这类方程为微分方程.

定义 7.1.1　含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程．只含一个自变量的微分方程称为常微分方程，自变量多于一个的称为偏微分方程. 微分方程中导数的最高阶数称为微分方程的阶.

于是 n 阶常微分方程的一般形式是

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)})=0 \tag{7.1.1}$$

本章只介绍常微分方程，并简称为微分方程或方程.

定义 7.1.2　如果方程中未知函数 y 和它的各阶导数 y', ..., $y^{(n)}$ 都是一次幂的，则称它为线性微分方程，否则称它为非线性微分方程.

n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）和 $f(x)$ 都是 x 的已知函数.

例 7.1.1　下面的方程都是常微分方程.

$$(y')^2 = 3x^2 + 2 \tag{7.1.2}$$

$$y' = 1 + y^2 \tag{7.1.3}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \text{（}\omega > 0\text{ 是常数）} \tag{7.1.4}$$

它们的阶数分别为 1、1、2．方程（7.1.4）是线性的，而方程（7.1.2）和（7.1.3）是非线性的．

定义 7.1.3 代入微分方程能使方程成立的函数，称为方程的解．

例 7.1.2 函数 $y = \tan x$ 是方程（7.1.3）在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的一个解，而 $y = \tan(x - c)$ 是方程（7.1.3）在区间 $(c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$ 上的解，其中 c 为任意常数；函数 $y = 3\cos\omega x$ 、 $y = 4\sin\omega x$ 都是方程(7.1.4)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解，而且对任意常数 c_1 和 c_2 ，$y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 也是方程(7.1.4)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解．

从上面的讨论可知，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数（与方程的阶数有关），而有的解不含任意常数．为了加以区别，我们给出如下定义：

定义 7.1.4 方程（7.1.1）中含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为它的通解．不含任意常数的解称为它的特解．使这些任意常数取定值的条件，称为微分方程的初始条件，我们把求满足初始条件的微分方程特解的问题称为解的初值问题．

例 7.1.3 验证函数 $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 是方程 $y'' + \omega^2 y = 0$（$\omega > 0$ 是常数）(7.1.4)的解，其中 c_1、c_2 为任意常数．

解 $y' = -c_1\omega\sin\omega x + c_2\omega\cos\omega x$ ， $y'' = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x$ ，

将 y、y'' 的表达式代入方程（7.1.4）有

$$y'' + \omega^2 y = -c_1\omega^2\cos\omega x - c_2\omega^2\sin\omega x + \omega^2(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x) \equiv 0 \text{，} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

所以对任意常数 c_1、c_2 ， $y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ 都是方程（7.1.4）的解．

类似验证 $y = A\sin(\omega x + B)$（A、B 为任意常数）也是方程（7.1.4）的解．而 $y = 3\cos\omega x$ 和 $y = 4\sin\omega x$ 是方程（7.1.4）的两个特解．

例 7.1.4 解微分方程 $y'' = x$ ，其中 $y|_{x=0} = 1,\ y'|_{x=0} = 0$.

解 对方程两边积分，得 $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$ ，再积分，得 $y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

由 $y'|_{x=0} = 0$ 得 $c_1 = 0$ ，由 $y|_{x=0} = 1$ 得 $c_2 = 1$ ，因此，所求方程的特解为： $y = \frac{1}{6}x^3 + 1$.

习题 7.1

一、选择题

1．方程 $(y')^3 + 2(y')^2 y + 2y' = 0$ 的阶数是（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2．方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是（　）.

A．3　　B．4　　C．2　　D．5

二、解答题

1．指出方程 $y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$ 的阶数.

2．验证 $y=3x$ 是否是方程 $y'=3$ 的解.

§7.2　一阶微分方程的解法

本节讲述一阶微分方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题．微分方程的求解方法很多，我们这里仅就一阶微分方程介绍一些初等的解法.

一、可分离变量方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{7.2.1}$$

的方程称为可分离变量方程，其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都是连续函数.

当 $g(y)\neq 0$ 时，把（7.2.1）改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$ （称为变量分离），

两边积分，得通解（隐式通解）

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+c \tag{7.2.2}$$

这里我们把积分常数 c 明确写出来，而把 $\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 、 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的一个确定的原函数.

例 7.2.1　求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=0 \tag{7.2.3}$$

的通解.

解　分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$ ，两边积分得 $\ln|y|=x^2+\tilde{c}$

即 $|y|=\tilde{c}\mathrm{e}^{x^2}$ ．令 $c=\pm\tilde{c}$ ，则 $y=c\mathrm{e}^{x^2}$ （ $c\neq 0$ ）.

此外 $y=0$ 是方程的常数解．若允许 $c=0$ ，则此解也含于上式中．所以方程（7.2.3）的通解为 $y=c\mathrm{e}^{x^2}$ ，其中 c 为任意常数.

例 7.2.2 求初值问题 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=0$， $y(0)=1$ 的解.

解 求通解，方程可以变形为 $y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$

分离变量得 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

两边积分得通解为 $\dfrac{y^2}{2}=-x\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}+c$

代入初始条件，即 $x=0$， $y=1$，得 $c=-\dfrac{1}{2}$

所以解为 $y^2=2\mathrm{e}^{x}(1-x)-1$.

二、可化为变量分离方程的特殊类型

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.4}$$

的方程称为齐次方程，其中 φ 是连续函数.

其解法是通过变量代换，可将（7.2.4）化为变量分离方程，然后按变量分离方程求解.

令 $\dfrac{y}{x}=u$ 或 $y=ux$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(ux)'=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入（7.2.4）得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}$$

这是一个变量可分离方程.

例 7.2.3 解方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.

解 令 $\dfrac{y}{x}=u$ 或 $y=xu$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$. 代入方程得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\sqrt{1+u^2}$，即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$$

分离变量并积分，有 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})+\ln c_1=\ln|x|$（$c_1>0$）从而推出

$$x=c(u+\sqrt{1+u^2})\ (c=\pm c_1\neq 0)$$

将 $\dfrac{y}{x}=u$ 代回原变量得 $y=\dfrac{x^2}{2c}-\dfrac{c}{2}$，其中 $c\neq 0$ 为任意常数.

三、一阶线性微分方程

在一阶方程中，如果未知函数及其导数都是一次的，那么这类方程叫做一阶线性方程. 一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.2.5}$$

其中P、Q为连续函数．当$Q(x)\equiv 0$时，（7.2.5）成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7.2.6}$$

称它为一阶线性齐次微分方程．

相应地，当$Q(x)\neq 0$时，（7.2.5）称为一阶线性非齐次微分方程．

对于方程（7.2.6），它是可分离变量的微分方程，可以求出方程（7.2.6）的通解

$$y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.7}$$

其中c为任意常数，注意$\int P(x)\mathrm{d}x$仅表示$P(x)$的一个原函数．

例 7.2.4　求$\mathrm{d}y=-y\cos x\mathrm{d}x$的通解．

解　分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\cos x\mathrm{d}x$，两边积分，有

$$\ln y=-\sin x+\ln C$$

即$y=C\mathrm{e}^{-\sin x}$．

例 7.2.5　求$y'+\dfrac{1}{1+x}y=0$满足初始条件$y|_{x=1}=1$的特解．

解　分离变量得$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$，两边积分，有

$$\ln y=-\ln(1+x)+\ln C$$

故通解为$y=\dfrac{C}{1+x}$．

将$x=1$，$y=1$代入得$C=2$，其特解为$y=\dfrac{2}{1+x}$．

下面我们来求非齐次方程（7.2.5）的通解．现在对方程（7.2.7）作变换

$$y=c(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.8}$$

代入（7.2.5）化简得$c'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，由此两边积分，有

$$c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c$$

将它代回到（7.2.8）即得方程（7.2.5）的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right) \tag{7.2.9}$$

上述求解方法通常称为常数变易法（把（7.2.7）中c变易为x的函数$c(x)$），公式（7.2.9）也称为方程（7.2.5）的常数变易公式．它是一种重要的数学方法．通常只要知道了线性齐次方程的通解，便可用常数变易法将对应的线性非齐次方程的通解求出来．

例 7.2.6 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

解 先求出对应的齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 的通解.

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\mathrm{d}x$，两边积分再化简得

$$\ln y=-x+C$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-x}$$

设所给的一阶线性非齐次方程的通解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{-x}$，则

$$y'=C'(x)\mathrm{e}^{-x}+C(x)\mathrm{e}^{-x}(-1)$$

代入原方程得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x}+C(x)\mathrm{e}^{-x}(-1)+C(x)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$$

整理得 $C'(x)=1$

于是 $C(x)=x+C$

所以原方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$.

结合上述讨论，求一阶线性非齐次微分方程通解的步骤为：

（1）先求出对应的齐次微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解 Cy_1.

（2）把 C 看成 x 的函数，代入（1）式，确定 $C(x)$，即得方程（1）的通解，这种方法叫做常数变易法.

例 7.2.7 求微分方程 $xy'+y=\cos x$ 满足初始条件 $y(\pi)=1$ 的特解.

解 使用常数变易法，原方程可写成

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cos x$$

对应的线性齐次方程为

$$y'+\frac{1}{x}y=0$$

求得该线性齐次方程的通解为

$$y=\frac{C}{x}$$

设所给的线性非齐次方程的通解为 $y=C(x)\dfrac{1}{x}$，则

$$y'=C'(x)\frac{1}{x}-C(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

代入原方程整理得 $C'(x)\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}\cos x$，即 $C'(x)=\cos x$，于是

$$C(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$

故原方程的通解为

$$y=(\sin x+C)\frac{1}{x}=\frac{C}{x}+\frac{\sin x}{x}$$

将 $x=\pi$，$y=1$ 代入得 $C=\pi$，故所求的特解为

$$y=\frac{1}{x}(\pi+\sin x)$$

在上例通解中，$y=\dfrac{C}{x}$ 是对应齐次线性方程的通解，$y^*=\dfrac{\sin x}{x}$ 是非齐次线性方程的特解. 一般地，利用常数变易法求解 $y'+P(x)y=Q(x)$ 可得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)dx}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $y=c\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是对应的方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解，$y^*=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是非齐次方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一个特解，即一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的特解之和.

例 7.2.8　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

解　$P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}x\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}(-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+C)\end{aligned}$$

例 7.2.9　设函数 $f(x)$ 一阶可导，且满足 $f(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$.

解　对等式 $f(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2$ 两端同时求导，得 $f'(x)=xf(x)+2x$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=2x$$

它是一阶线性非齐次微分方程，它所对应的齐次微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=x\mathrm{d}x$，两边积分化简得 $y=C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，令 $y=C(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，则

$$y'=C'(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+C(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}x$$

代入原方程 $C'(x)=2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，从而 $C(x)=-2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，故方程的通解为

$$f(x)=-2+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

又因为 $f(0)=0$，代入通解得 $C=2$，所以 $f(x)=-2+2\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$．

例 7.2.10　解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$．

解　它是一阶线性非齐次微分方程，且 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^2$

代入公式得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left[\int(x+1)^2\mathrm{e}^{\int\frac{-2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]\\&=\mathrm{e}^{2\ln(x+1)}\left[\int(x+1)^2\mathrm{e}^{-2\ln(x+1)}\mathrm{d}x+c\right]\\&=(x+1)^2(\int\mathrm{d}x+c)=(x+1)^2(x+c)\end{aligned}$$

习题 7.2

一、选择题

1．下列函数中，（　　）是微分方程 $\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$ 的解．

A．$y=2x$　　B．$y=x^2$

C．$y=-2x$　　D．$y=-x^2$

2．微分方程 $2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$ 的通解是（　　）．

A．$y^2-x=c$　　B．$y-\sqrt{x}=c$

C．$y=x+c$　　D．$y=-x+c$

3．微分方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2$ 的特解是（　　）．

A．$y=\mathrm{e}^x+1$　　B．$y=2\mathrm{e}^x$

C．$y=2\mathrm{e}^{2x}$　　D．$y=\mathrm{e}^{2x}$

4．下列微分方程中为可分离变量方程的是（　　）．

A．$\dfrac{dx}{dt}=xt+t$　　B．$x\dfrac{dx}{dt}=e^{xt}\sin t$

C．$\dfrac{dx}{dt}=xt+t^2$　　D．$\dfrac{dx}{dt}=x^2+t^2$

5．微分方程$\dfrac{dx}{y}+\dfrac{dy}{x}=0$满足$y|_{x=3}=4$的特解是（　）．

A．$x^2+y^2=25$　　B．$3x+4y=c$

C．$x^2+y^2=c$　　D．$x^2+y^2=7$

6．下面微分方程中为一阶线性的是（　）．

A．$xy'+y^2=x$　　B．$y'+xy=\sin x$

C．$yy'=x$　　D．$(y')^2+xy=0$

7．微分方程$y^2dx-(1-x)dy=0$是（　）微分方程．

A．一阶线性齐次　　B．一阶线性非齐次

C．可分离变量　　D．二阶线性齐次

二、填空题

1．通过点$(1,1)$处，且斜率处处为x的曲线方程是________．

2．微分方程$y'-2y=0$的通解是________．

3．$y=x^2$所满足的一阶微分方程是________．

4．齐次方程$y'=\dfrac{y}{x}+1$的通解为________．

5．方程$xy'+y=3$的通解是________．

三、计算下列微分方程的通解（可分离变量部分）

1．$xy'-y\ln x=0$　　2．$\sin xdy+\cos ydx=0$

3．$y(x^2-1)dy-(y^2+1)dx=0$　　4．$y\ln y+xy'=0$

四、求下列微分方程的解（齐次型方程部分）

1．求下列齐次微分方程的通解：

（1）$xy'=y(\ln y-\ln x)$

（2）$x\dfrac{dy}{dx}-y=2\sqrt{xy}$

2．求下列齐次微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$，$y|_{x=1}=1$

（2） $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$， $y|_{x=1}=2$

3．化方程为可分离变量的微分方程，并求出其通解：

$(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$ 　　提示：令 $x+y=u$

五、求下列微分方程的解（一阶线性微分方程部分）

1．求下列微分方程的特解：

（1） $xy'+2y=x$， $y|_{x=1}=0$ 　　（2） $xy'+y-\mathrm{e}^x=0$， $y|_{x=1}=\mathrm{e}$

（3） $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x=\mathrm{e}^{3t}$， $x|_{t=0}=0$

2．求下列微分方程的通解：

（1） $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$ 　　（2） $y'-\frac{1}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)$

（3） $y'=-2xy+x\mathrm{e}^{-x^2}$

3．求曲线的方程，这条曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线的斜率等于 $2x+y$．

§7.3　二阶常系数微分方程的解法

定义 7.3.1　形如

$$y''+P(x)y'+Q(x)\,y=f(x) \tag{7.3.1}$$

的方程称为二阶线性非齐次微分方程．如果 $f(x)=0$，即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{7.3.2}$$

方程（7.3.2）称为二阶线性齐次微分方程．

力学中，物体在有阻力的情况下的自由振动微分方程和强迫振动微分方程，以及电学中串联电路的振动方程都是二阶线性微分方程．

一、二阶线性微分方程解的结构

定理 7.3.1（齐次线性方程解的结构）　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（7.3.2）的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{7.3.3}$$

也是方程（7.3.2）的解，其中 C_1、C_2 是任意常数．如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 之比不为常数（即 $\frac{y_1}{y_2}\neq k$，k 为常数），则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\ （C_1、C_2 是任意常数）$$

是方程（7.3.2）的通解．

证明只需要将式（7.3.3）代入方程（7.3.2）验证即可.（不难推广到 n 阶齐次线性方程）

定理 7.3.2（非齐次线性方程解的结构） 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程（7.3.1）的一个特解，$Y(x)$ 是该方程所对应的齐次线性方程（7.3.2）的通解，则

$$y = Y(x) + y^*(x) \tag{7.3.4}$$

是二阶非齐次线性方程（7.3.1）的一个通解．证明略.

定理 7.3.3　设二阶非齐次线性方程（7.3.1）的右边是两个函数之和，如

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \tag{7.3.5}$$

而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程（7.3.5）的特解.（叠加原理）

二、二阶常系数齐次线性微分方程

定义 7.3.2　设 p、q 为常数，形如

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{7.3.6}$$

的方程称为二阶常系数线性微分方程．如果 $f(x) = 0$，方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.3.7}$$

称为二阶常系数齐次线性微分方程．如果 $f(x) \neq 0$，方程（7.3.6）称为二阶常系数非齐次线性微分方程.

由齐次线性微分方程解的结构知道，求齐次线性微分方程（7.3.7）的解，只需要求出它的两个其比不为常数的解即可.

由指数函数 e^x 的导数特征，联系方程（7.3.7），其应有 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 形式的解，其中 r 为待定常数．将 $y = \mathrm{e}^{rx}$，$y' = r\mathrm{e}^{rx}$，$y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$ 代入方程（7.3.7），得

$$\mathrm{e}^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

因为 $\mathrm{e}^{rx} \neq 0$，所以

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{7.3.8}$$

即当 r 是一元二次方程（7.3.8）的根时，$y = \mathrm{e}^{rx}$ 就是齐次线性微分方程（7.3.7）的解.

方程 $r^2 + pr + q = 0$ 称为齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征方程，特征方程的根称为特征根．下面就特征方程（7.3.8）的特征根的不同情形讨论其对应的齐次方程的通解.

（1）当特征方程（7.3.8）有两个不同的实根 r_1 和 r_2 时，则方程（7.3.7）有两个线性无关的解 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$，$y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$．此时方程（7.3.7）有通解

$$y = C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$$

（2）当特征方程（7.3.8）有两个相同的实根 r 时，即 $r_1 = r_2 = r$，方程（7.3.7）有一个解 $y_1 = e^{rx}$，这时直接验证可知 $y_2 = xe^x$ 是方程（7.3.7）的另一个解，且 y_1 与 y_2 线性无关，所以此时有通解

$$y = C_1 e^{rx} + C_2\, x e^{rx} = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}$$

（3）当特征方程（7.3.8）有一对共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$（其中 α、β 均为实常数且 $\beta \neq 0$）时，方程（7.3.7）有两个线性无关的解 $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ 和 $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$.

因此方程（7.3.7）的通解为

$$y = Ae^{\alpha x + i\beta x} + Be^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x})$$

利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，还可以得到实数形式的解

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

其中 $C_1 = A + B$，$C_2 = i(A - B)$．一般情况下，如无特别声明，要求写出实数形式的解.

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤如下：

第一步　写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

第二步　求出特征根.

第三步　根据特征根的情况按表 7.3.1 写出对应微分方程的通解.

表 7.3.1

特征方程的根	通解形式
两个不等实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}$
一对共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

例 7.3.1　求方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

解　方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

其特征根为 $r_1 = 6$，$r_2 = -1$，且互异，所以方程的通解为

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}.$$

例 7.3.2　求方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解.

解　方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

其特征根为 $r = r_1 = r_2 = -1$，二重特征根，所以方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}$$

例 7.3.3　求方程 $y'' + 4y' + 5y = 0$ 的通解.

解　方程 $y''+4y'+5y=0$ 的特征方程为

$$r^2+4r+5=0$$

其特征根为 $r_1=-2+\mathrm{i}$，$r_2=-2-\mathrm{i}$，共轭复根，所以方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

由定理 7.3.2，要求非齐次线性方程（7.3.6）的通解，先求出其对应的齐次方程（7.3.7）的通解 Y，再求出非齐次方程（7.3.6）的一个特解 y^*，即可以得到非齐次方程的通解 $y=Y+y^*$.

1.　$f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的情形

在此情形中，λ 是常数，$P_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，即

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

这时，非齐次方程为

$$y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{7.3.9}$$

由于方程（7.3.9）的右边是一个 n 次多项式与指数函数的乘积，根据其特征，不妨设方程的一个特解为

$$y^*=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

则

$$y^{*\prime}=Q_m'(x)\mathrm{e}^{\lambda x}+\lambda Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$y^{*\prime\prime}=Q_m''(x)\mathrm{e}^{\lambda x}+2\lambda Q_m'(x)\mathrm{e}^{\lambda x}+\lambda^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

将 y^*、$y^{*\prime}$ 和 $y^{*\prime\prime}$ 代入方程（7.3.9），整理得

$$Q_m''(x)+(2\lambda+p)Q_m'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q_m(x)=P_n(x)$$

（1）如果 λ 不是对应齐次方程（7.3.7）的特征根，即 $r^2+pr+q\neq 0$，此时，$Q_m(x)$ 是一个与 $P_n(x)$ 同次的多项式，即 n 次多项式.

（2）如果 λ 是对应齐次方程（7.3.7）的特征单根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，而 $2\lambda+q\neq 0$，此时，$Q'_m(x)$ 是一个 n 次多项式，则 $Q_m(x)$ 是一个 $n+1$ 次多项式.

（3）如果 λ 是对应齐次方程（7.3.7）的特征重根，即 $r^2+pr+q=0$ 且 $2\lambda+p=0$，此时，$Q_m''(x)$ 是一个 n 次多项式，则 $Q_m(x)$ 是一个 $n+2$ 次多项式.

综上所述，有如下结论：

二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 具有形如

$$y^*=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

的特解，其中 $Q_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 都是 n 次多项式，k 的取值为

$$k=\begin{cases}0,\ \lambda & 不是特征根\\ 1,\ \lambda & 是特征单根\\ 2,\ \lambda & 是特征重根\end{cases}$$

例 7.3.4 求方程 $9y''+6y'+y=7\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解．

解 原方程对应的齐次方程为$9y''+6y'+1=0$，它的特征方程为

$$9r^2+6r+1=0$$

其特征根为 $r_1=r_2=-\dfrac{1}{3}$，因为$\lambda=2$不是特征根，故设特解为

$$y^*=A\mathrm{e}^{2x}$$

将y^*、$y^{*\prime}$、$y^{*\prime\prime}$代入原方程，得$49A=7$解得$A=\dfrac{1}{7}$，故原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{7}\mathrm{e}^{2x}$$

例 7.3.5 求方程$y''-2y'=3x+1$的通解．

解 原方程对应的齐次方程为$y''-2y'=0$，其特征方程为

$$r^2-2r=0$$

其特征根为$r_1=0,\ r_2=2$，原方成对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

因为$\lambda=0$是特征单根，设特解为

$$y^*=x(Ax+B)$$

则

$$y^{*\prime}=2Ax+B$$

$$y^{*\prime\prime}=2A$$

将y^*、$y^{*\prime}$、$y^{*\prime\prime}$代入原方程，得

$$-4Ax+(2A-2B)=3x+1$$

即

$$\begin{cases}-4A=3\\ 2A-2B=1\end{cases}$$

解得$A=-\dfrac{3}{4}$，$B=-\dfrac{5}{4}$，故原方程的特解为

$$y^*=x\left(-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x$$

因此原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}-\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x$$

2. $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_j(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x]$ 的情形

在此情形中，$P_j(x)$、$P_k(x)$ 分别是 x 的 j 次和 k 次多项式，λ、β 为常数．这时，非齐次方程为

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_j(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x] \tag{7.3.10}$$

容易知道，它有形如

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[Q_m(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x] \tag{7.3.11}$$

的特解，其中 $Q_m(x)$、$R_m(x)$ 是 m 次多项式，$m=\max\{j,k\}$．而

$$k=\begin{cases}0,\ \lambda+i\beta\ \text{不是特征根}\\ 1,\ \lambda+i\beta\ \text{是特征单根}\end{cases}$$

例 7.3.6　设置下列方程的特解的形式．

（1）$y''+y=x\cos 2x$．

（2）$y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$．

（2）$y''-6y'+9y=(x+1)\,\mathrm{e}^{3x}\sin x$．

解　（1）因为特征方程为 $r^2+1=0$，$\lambda+\mathrm{i}\beta=2\mathrm{i}$ 不是特征根，所以取 $k=0$，而 $m=\max\{1,0\}=1$，故应设特解为

$$y^*=(a_0x+a_1)\cos 2x+(b_0x+b_1)\sin 2x$$

（2）因为特征方程为 $r^2-2r+5=0$，$\lambda+\mathrm{i}\beta=1+2\mathrm{i}$ 是特征单根，所以取 $k=1$，而 $m=\max\{0,0\}=0$，故应设特解为

$$y^*=x\mathrm{e}^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

（3）因为特征方程为 $r^2-6r+9=0$，$\lambda+\mathrm{i}\beta=3+\mathrm{i}$ 不是特征根，所以取 $k=0$，而 $m=\max\{1,0\}=1$，故应设特解为

$$y^*=\mathrm{e}^{3x}[(a_0x+a_1)\cos x+(b_0x+b_1)\sin x]$$

例 7.3.7　求方程 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x+x$ 的通解．

解　先求对应齐次方程的通解 Y，由于特征方程 $r^2+3r+2=0$ 的特征根为 $r_1=-1$，$r_2=-2$，所以

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$$

可以求出 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的一个特解

$$y_1^*=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)$$

以及 $y''+3y'+2y=x$ 的一个特解

$$y_2^*=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$$

因此，由本节定理 7.3.3（叠加原理）知 $y^*=y_1^*+y_2^*$ 为原方程的一个特解，故原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= Y + y^* \\ &= C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x) + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

思考题： $y_1 = \mathrm{e}^x$、$y_2 = \mathrm{e}^{x+1}$ 都是方程 $y'' - y = 0$ 的解，$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{x+1}$ 是方程 $y'' - y = 0$ 的通解吗？为什么？

习题 7.3

（齐次线性微分方程部分）

一、选择题

1．下列函数中是方程 $y'' + y' = 0$ 的通解的是（　　）．

A．$y = C_1\sin x + C_2\cos x$　　B．$y = C\mathrm{e}^{-x}$

C．$y = C_1$　　D．$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x}$

2．下列函数中是方程 $y'' + y = 0$ 的通解的是（　　）．

A．$y = C_1\cos x + C_2\sin x$　　B．$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$

C．$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}$　　D．$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x$

3．下列函数中是方程 $2y'' + y' - y = 0$ 的通解的是（　　）．

A．$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$　　B．$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

C．$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$　　D．$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$

4．函数 $y = C_1\mathrm{e}^{2x+C_2}$（其中 C_1、C_2 是任意常数）是微分方程 $y'' - y' - 2y = 0$ 的（　　）．

A．通解　　B．特解

C．不是解　　D．是解，但不是通解，也不是特解

二、计算题

1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'' - 3y' = 0$　　（2）$y'' - 2y' + y = 0$

（3）$4y'' - 8y' + 5y = 0$

2．求下列微分方程的特解：

（1）$y'' - y' - 12y = 0$，$y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 3$

（2）$y'' - 4y' + 13y = 0$，$y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 3$

3．求下列微分方程的通解：

（1）$y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

（2） $y^{(4)}+2y''+y=0$

（非齐次线性微分方程部分）

一、选择题

1．微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的特解形式是（　　）.

A．$ae^{2x}+(bx+c)$　　B．$(ax+b)e^{2x}$

C．$x^2(ax+b)e^{2x}$　　D．$x(ax+b)e^{2x}$

2．$y''-y=e^x+1$（a、b 为常数）的特解形式是（　　）.

A．ae^x+b　　B．axe^x+bx

C．ae^x+bx　　D．axe^x+b

3．$y''-2y'+10y=e^x\cos 3x$ 的特解形式为（　　）.

A．$e^x(a\cos 3x+b\sin 3x)$　　B．$e^x(a\cos 3x+bx\sin 3x)$

C．$e^x(ax\cos 3x+bx\sin 3x)$　　D．$e^x(ax\cos 3x+b\sin 3x)$

4．微分方程 $y''+y=\cos x$ 的一个特解应具有的形式为（a、b、c 为常数）（　　）.

A．$x(a\cos x+b\sin x)$　　B．$(a\cos x+b\sin x)$

C．$a\cos x$　　D．$b\sin x$

二、填空题

1．微分方程 $y''-7y'=(x-1)^2$ 的待定系数法确定的特解形式（系数的值不必求出）是________.

2．微分方程 $y''+y'=\cos x(1+2\sin x)$ 的待定系数法确定的特解形式（系数的值不必求出）是________.

三、计算题

1．下列微分方程的通解：

（1） $y''+y'-2y=2x+1$

（2） $y''+y'=2x+1$

（3） $y''+y=2x+1$

（4） $y''+y'-2y=xe^x$

（5） $y''+y'-2y=xe^{-x}$

（6） $y''-2y'+y=xe^x$

2．求下列微分方程的通解：

（1） $y''+y=\sin x$

（2） $y''-2y'+5y=e^x\sin x$

§7.4 微分方程的应用

在数学、力学、物理、化学等自然科学中有许多经过实践或实验检验的规律或定律，如牛顿冷却定理、牛顿运动定律、物质放射性的规律、电路问题中的基尔霍夫（Kirchhoff）第二定律、曲线的切线性质等，它们都涉及到某些函数的变化率，由此所列出的关系式自然就是包含自变量、未知函数及其导数的微分方程．下面仅举一些例题具体阐述微分方程的应用．

一、几何问题

例 7.4.1 求一曲线，使得它的切线包含在 x 轴与 y 轴之间的一段线段长度等于常数 $a>0$．

解 设所求曲线方程为 $y=f(x)$，过 (x,y) 点的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

当 $X=0$ 时，$Y=y-xy'$；当 $Y=0$ 时，$X=x-\dfrac{y}{y'}=\dfrac{xy'-y}{y'}=\dfrac{-(y-xy')}{y'}$，依题意

$$\begin{aligned}\sqrt{X^2+Y^2}&=\sqrt{(y-xy')^2+\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2}\\&=\sqrt{(y-xy')^2+\frac{(y-xy')^2}{y'^2}}\\&=(y-xy')\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}=a\end{aligned}$$

即 $y=\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}+xy'$．令 $y'=p$，代入得

$$y=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+xp \qquad ①$$

而 $y'=p+x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即

$$p=p+x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

化简 $\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[x+\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=0$$

（1）若 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$， $p=c$，则有

$$y=cx+\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

（2）若 $x+\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0$，则有

$$x=\frac{-a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad ②$$

②代入①得 $y=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{ap(1+p^2)-ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{ap^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

即

$$\begin{cases} y^{\frac{2}{3}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}p^2}{(1+p^2)} \\ x^{\frac{2}{3}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{(1+p^2)} \end{cases}$$

即曲线方程为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

例 7.4.2　设 $A(0,2)$ 和 $B(2,0)$ 在线段 AB 上，有连接 A、B 两点的一条曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$（如图 7.4.1 所示），在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 $P(x,y)$，弦 AP 与弧 $\overset{\frown}{AP}$ 所围成的面积（阴影部分）等于 $\frac{2}{3}x^3$，求此曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程.

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$，由条件可得阴影面积为

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{(f(x)+2)}{2}x=\frac{2}{3}x^3$$

对上式两边求导，得

$$2f(x)-(f(x)+2)-xf'(x)=4x^2$$

化简得 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{4x^2+2}{x}$．这是一个一阶非齐次线性微分方程，先求对应齐次方程通解：

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=0$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=0$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，即 $y=Cx$.

令 $y=C(x)x$，则 $y'=C'(x)x+C(x)$，代入原方程有

$$xC'(x)=-\frac{4x^2+2}{x}$$

故 $C(x)=-4x+\frac{2}{x}+C$，所以有 $y=-4x^2+2+Cx$.

由题目可得，$f(2)=0$，代入通解得 $-16+2+2C=0$，所以 $C=7$.

所以所求曲线弧的方程为 $f(x)=-4x^2+7x+2$.

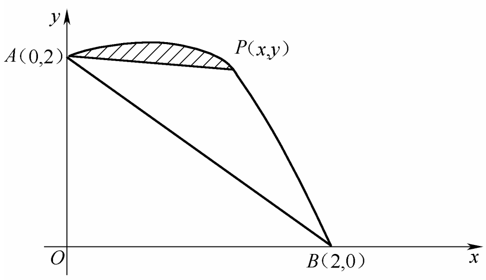

图 7.4.1

二、冷却问题

例 7.4.3　把一个加热到 50℃的物体放到 20℃的恒温环境中冷却，求物体温度的变化规律.

解　根据牛顿冷却定律：温度为 u 的物体，在温度为 u_0 的周围环境中冷却的速率与温差 $u-u_0$ 成正比.

在冷却过程中，设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，物体冷却的速率就是其温度对时间的变化率 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. 于是由冷却定律可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-20) \qquad ①$$

这里 $k>0$ 为比例常数，上式右边出现负号，是因为随时间 t 的增加，温度 u 在减少，即当 $u>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}<0$.

此外，$u=u(t)$ 应满足初始条件

$$u(0)=50 \qquad ②$$

解由①和②构成的初值问题，得所求温度的变化规律 $u=20+30\mathrm{e}^{-kt}$.

可见，物体的冷却是按指数规律变化的（如图 7.4.2 所示）. 当 t 增加时，温度开始时下降较快，以后逐渐变慢而最终趋于环境温度.

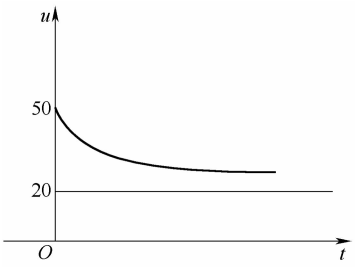

图 7.4.2

三、力学问题

例 7.4.4　设将一物体以初速度 1960cm/s 作竖直上抛运动，不计空气阻力，求：

（1）物体达到的最大高度.

（2）物体回到出发点所需的全部时间.

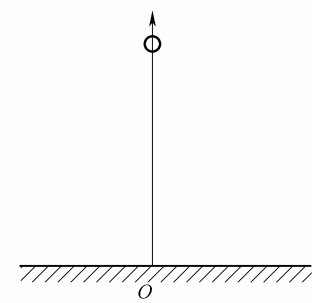

图 7.4.3

解　如图 7.4.3 所示力的方向，由牛顿第二定律，

可得 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mg$，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g$，

则有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1$.

代入初始条件 $t=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1960$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gt+1960$$

即 $x=\dfrac{-gt^2}{2}+1960t+C_2$，再由初始条件 $t=0,\ x=0$，得 $C_2=0$.

即 $x=-490t^2+1960t$.

（1）当 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，$-980t+1960=0$，解得

$$t=2，\quad x=-490\times4+1960\times2=1960\text{cm}$$

（2）当 $x=0$，$t(-490t+1960)=0$，解得 $t_1=0$（舍），$t_2=4$.

所以物体回到出发点所需的全部时间为 4s.

例 7.4.5　在某介质中一个 196kg 重的物质，在 $t=0$ 时由静止开始下落，介质阻力的大小等于瞬时速度的 19.6 倍，求：

（1）在 t 时刻的速度和所经过的距离.

（2）物体的极限速度?

解 设所求速度$v=v(t)$，由牛顿第二定律知：净力=重量-阻力.

由题意得 $196\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=196\times 9.8-19.6v$

即 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9.8-\dfrac{v}{10}$

解得

$$v=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{10}\mathrm{d}t}\left[\int 9.8\mathrm{e}^{\int\frac{1}{10}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\left[\int 9.8\mathrm{e}^{\frac{t}{10}}\mathrm{d}t+c\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\left[98\mathrm{e}^{\frac{t}{10}}+c\right]$$

（1）当$t=0$时，$v=0,\ C=-98$，

$$v=(98-98\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}})=98(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}),\quad x=98(t+10\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}+C_1)$$

当$t=0$时，$x=0,\ C_1=-10$，$x=98(t+10\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}-10)$.

（2）$\lim\limits_{t\to\infty}v=98\ \mathrm{m/s}$

例 7.4.6 一质量为m的船以速度v_0行驶，在$t=0$时动力被关闭，假定水的阻力正比于v^2，求速度v与经过距离的函数关系.

解 设时间t与经过距离的函数关系为$x=x(t)$，净力$=0-kv^2$.

由牛顿第二定律得 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kv^2$，即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

代入有$mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$，即 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{k}{m}\mathrm{d}x$，解得$\ln v=-\dfrac{k}{m}x+C_1$.

初始条件当$t=0$时，$v=v_0,\ x=0$，故$C_1=\ln v_0$. 所以速度与经过距离的函数关系为

$$v=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x+\ln v_0}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}x}$$

例 7.4.7 一长度为a的均匀链条放置在一水平而无摩擦力的桌面上，链条在桌边悬挂下来的长度为b，如图 7.4.4 所示，问链条全部滑离桌面需要多长的时间?

解 物体所受的净力=质量×力速度.

设链条轨迹方程为$x=x(t)$，设链条的线密度为ρ，

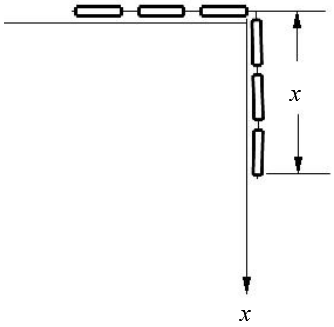

图 7.4.4

由牛顿第二定律得 $\rho a\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(\rho x)g$，

而 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，

代入化简 $av\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=gx$，

即 $v\mathrm{d}v=\dfrac{g}{a}x\mathrm{d}x$，

解 $\dfrac{v^2}{2}=\dfrac{g}{2a}x^2+C$.

初始条件 $v=0,\ x=b$，则有 $C=-\dfrac{g}{2a}b^2$，所以 $\dfrac{v^2}{2}=\dfrac{g}{2a}x^2-\dfrac{g}{2a}b^2$.

化简得 $v=\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sqrt{x^2-b^2}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sqrt{x^2-b^2}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-b^2}}=\sqrt{\dfrac{g}{a}}\mathrm{d}t$.

初始条件 $t=0,\ x=b$，代入有

$$\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-b^2}}{b}\right)=\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

当 $x=a$ 时，$T=\sqrt{\dfrac{a}{g}}\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$，所以链条全部滑离桌面需要的时间为

$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

四、R-L 电路

设有简单的串联电路如图 7.4.5 所示，包含：

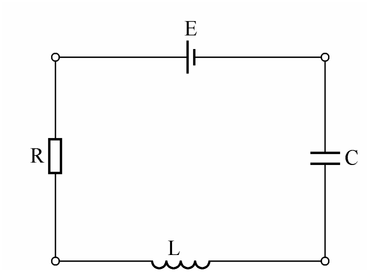

图 7.4.5

（1）E 伏特的电动势

（2）R 欧姆的电阻器

（3）L 亨利电感器

（4）C 法拉的电容器

电流 I（安培）就是电容器上电量 Q（库伦）的变化率，即 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$；电阻两端的电压降 $=IR$；电感两端的电压降 $=L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$；电容两端的电压降 $=\dfrac{Q}{C}$.

基尔霍夫定律的内容为：

（1）在任一节点处电流的代数和为 0；

（2）沿任一闭合电路的电压降的代数和为 0.

例 7.4.8 由一个 $R=5$ 欧姆和一个 $C=0.02$ 法拉的电容器，连同一个 $E=100$ 伏特的电源串联构成的电路（如图 7.4.6 所示），若在 $t=0$ 时电容器上的电量 Q 是 5 库伦，求 $t>0$ 时的电量 Q 和电流 I.

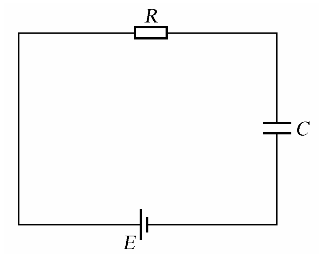

图 7.4.6

解 由基尔霍夫第二定律知 $IR+\dfrac{Q}{C}-E=0$，即

$$5\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+50Q=100$$

由题意可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+10Q=20 & ① \\ Q|_{t=0}=5 & ② \end{cases}$$

解方程①可得 $Q=\mathrm{e}^{-10t}\left[2\mathrm{e}^{10t}+C\right]$，

将②式代入上式可得 $C=3$，

所以电量 $Q=2+3\mathrm{e}^{-10t}$，电流 $I=-30\mathrm{e}^{-10t}$．

有时可以用微积分的微元法通过寻求一些微元之间的关系来建立微分方程式．在建立这些关系式时也要用到某些已知规律或定律，与前述方法的不同之处在于这里是对这些微元来应用规律或定律的．

五、溶液的混合问题

例 7.4.9　一容器内装有 100 公升的盐水，含 10 公斤盐，容器的一端以 3 公升/分的速度往容器内注入水，容器的另外一端以 2 公升/分的速度往容器外流出，问经过 60 分钟后容器内还剩下多少盐？

解　设经过 t 时间后，容器内剩下含盐量为 $x=x(t)$，此时容积为

$$\bar{v}=100+3t-2t=100+t$$

容器内盐的浓度为 $\rho_t=\dfrac{x(t)}{100+t}$，

又经过 $\mathrm{d}t$ 时间，容器内盐量减少 $\mathrm{d}x$，由 B 管流出盐量为 $2\rho_t\cdot\mathrm{d}t$，即

$$\mathrm{d}x=-2\rho_t\cdot\mathrm{d}t$$

将 $\rho_t=\dfrac{x(t)}{100+t}$ 代入上式，有

$$\mathrm{d}x=\frac{-2x}{100+t}\mathrm{d}t \qquad ①$$

由题意知，当 $t=0$ 时，含盐量 $x=10$，即

$$x\big|_{t=0}=10 \qquad ②$$

解①式有 $x=c(100+t)^{-2}$

将②式带入 $x=c(100+t)^{-2}$，解得 $c=10^5$，所以 $x=\dfrac{10^5}{(100+t)^2}$．

因此当 $t=60$ 时，容器内还剩下 $x=\dfrac{10^5}{(160)^2}\approx 3.9$ 公斤的盐．

本章小结

1．微分方程的定义（阶、解、通解、初始条件、特解）

2．可分离变量的微分方程的概念：形如 $y' = f(x)g(y)$ 形式的

3．可分离变量的微分方程的解法：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \overset{\text{分离变量}}{\Rightarrow} \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{两边同时积分}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

4．齐次微分方程的概念：形如 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 形式的

5．齐次微分方程的解法：

令 $\frac{y}{x} = u$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \text{（分离变量）}$$

$$\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x \text{（两边积分）}$$

$$\Rightarrow G(u) = \ln|x| + C \Rightarrow G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C$$

6．一阶线性微分方程的概念：形如 $y' + P(x)y = Q(x)$ 形式的

7．一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解法：

公式法：（在使用公式法时，必须是标准的一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ ）

一阶线性非齐次微分方程的通解为：$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$

8．二阶线性常系数齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的求解步骤：

（1）写出其相应的特征方程：$r^2 + pr + q = 0$.

（2）求出特征方程的特征根.

（3）根据根的不同情形，按照下列表格写出微分方程的通解.

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1、r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等的根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$
一对共轭虚根 $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

9．二阶线性非齐次微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解的求法：

（1）求出相应的齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解.

（2）按照下列表格写出非齐次微分方程的特解形式.

$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$	$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$
λ 不是特征方程的根 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$	$\lambda\pm i\omega$ 不是特征方程的根，则 $y^*=e^{\lambda x}\left[Q_m(x)\cos\omega x+\tilde{Q}_m(x)\sin\omega x\right]$
λ 是特征方程的单根 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$	$\lambda\pm i\omega$ 是特征方程的根，则 $y^*=xe^{\lambda x}\left[Q_m(x)\cos\omega x+\tilde{Q}_m(x)\sin\omega x\right]$
λ 是特征方程的重根 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$	

（3）将所设的非齐次微分方程的特解形式代入 $y''+py'+qy=f(x)$ 中，求出待定系数，进而求出非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解 y^*.

（4）其通解为：$y=Y(x)+y^*$（注：$Y(x)$ 为相应的齐次方程的通解）.

数学家简介——伯努利

伯努利（Daniel Bernoulli，1700－1782），瑞士物理学家、数学家、医学家.1700年2月8日生于荷兰格罗宁根,著名的伯努利家族中最杰出的一位.他是数学家 J.伯努利的次子，和他的父辈一样，违背家长要他经商的愿望，坚持学医，他曾在海得尔贝格、斯脱思堡和巴塞尔等大学学习哲学、伦理学、医学．1721 年取得医学硕士学位．伯努利在 25 岁时（1725 年）就应聘为圣彼得堡科学院的数学院士．8 年后回到瑞士的巴塞尔，先任解剖学教授，后任动力学教授，1750 年成为物理学教授．在 1725～1749 年间，伯努利曾十次荣获法国科学院的年度奖．1782 年 3 月 17 日，伯努利在瑞士巴塞尔逝世，终年 82 岁．