第 2 章　导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分．本章中，我们主要讨论导数和微分的概念以及他们的计算方法，对于导数的应用，将在第 3 章讨论．

2.1　导 数 的 概 念

2.1.1　导数概念的引例

为了说明微分学的基本概念——导数，我们先讨论两个问题：速度问题和切线问题．这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系．

例 2.1.1　变速直线运动的瞬时速度．

一物体做变速直线运动，位移函数为 $s = f(t)$，求物体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$．

首先考虑物体从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}, \tag{2.1.1}$$

其中 Δs 是这段时间内的路程改变量．

当时间间隔很小时，可以认为物体在时间 $\left[t_0, t_0+\Delta t\right]$ 内近似地做匀速运动．因此，可以用 $\bar{v}$ 近似代替 $v(t_0)$，且 Δt 越小，其近似度越高．为求在时刻 t_0 的速度的精确值，令 $\Delta t \to 0$，取（2.1.1）式的极限，我们把这个极限值称为在时刻 t_0 的（瞬时）速度，即

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2.1.2　平面曲线的切线斜率．

设一曲线方程为 $y = f(x)$，求曲线 $y = f(x)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率．

如图 2.1 所示，设点 $N(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 是曲线上任意点，作割线 MN．让 N 沿着曲线趋向 M，割线 MN 的极限位置 MT 就称为曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的切线．

设割线的倾角为 φ，则割线 MN 的斜率为

$$k_{MN} = \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

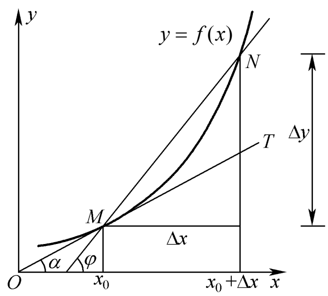


图 2.1

当点 N 沿曲线趋于点 M 时，割线 MN 的倾角 φ 趋近于切线 MT 的倾角 α ，即

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.1.2　导数的概念

1．函数在一点处的导数与导函数

从上面所讨论的两个问题看出，非匀速运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

我们撇开这些量的具体意义，就得出函数的导数概念.

定义 2.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx （点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.1.2)$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记作

$$f'(x_0)，\quad y'\big|_{x=x_0}，\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{ 或 } \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}，$$

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限（2.1.2）不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导．当 $\Delta x\to 0$ 时，比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$ ，则说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

令 $x=x_0+\Delta x$ ，当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$ ，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

常用此式来判断分段函数在分段点处是否可导.

令 $h=\Delta x$，则

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

式中的 h 即自变量的增量 Δx（导数与自变量的增量的表示形式无关）.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导．此时，对于每一个 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$，从而构成了一个新的函数，称为函数 $f(x)$ 的导函数，记作 $y',\ f'(x),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

通常导函数简称为导数.

例 2.1.3 试按导数定义求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(2x)-f(2a)}{x-a}$.

解 $$\lim_{x\to a}\frac{f(2x)-f(2a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(2x)-f(2a)}{\frac{1}{2}(2x-2a)}=2\lim_{x\to a}\frac{f(2x)-f(2a)}{2x-2a}=2f'(2a).$$

2．*左、右导数*

下面两个极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

分别叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**和**右导数**，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

由上一章关于左、右极限的性质可知下面的定理.

定理 2.1.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等.

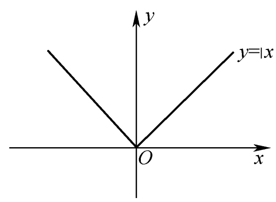


图 2.2

例 2.1.4 证明函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导（如图 2.2 所示）.

证明 $$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

第2章 导数与微分

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1 .$$

所以函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

例 2.1.5 证明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 不可导.

证明 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)}=+\infty$;

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0 .$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

注意：如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_{+}(a)$ 及 $f'_{-}(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

下面应用导数的定义计算一些简单函数的导数.

例 2.1.6 求函数 $y=x^2$ 的导数.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$,

即

$$(x^2)'=2x .$$

同理可得 $(x^n)'=nx^{n-1}$ （n 为正整数）.

一般地，当指数为任意实数 μ 时，有 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.

例如

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2} .$$

例 2.1.7 求指数函数 $y=a^x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$）.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$,

即

$$(a^x)'=a^x\ln a .$$

特别地，上式中令 $a=\mathrm{e}$ ，可得自然对数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的导数

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x .$$

例 2.1.8 求对数函数 $y=\log_a x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$）.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，上式中令 $a=\mathrm{e}$，可得自然对数函数 $y=\ln x$ 的导数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例 2.1.9 求函数 $y=\sin x$ 的导数.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x,$$

即

$$(\sin x)'=\cos x.$$

类似的方法可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

2.1.3 导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点($x_0, f(x_0)$)处的切线的斜率（如图 2.3 所示），即

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

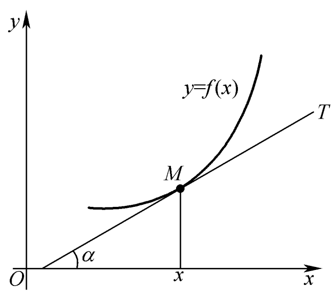


图 2.3

过曲线上一点且垂直于该点处切线的直线，称为曲线在该点处的**法线**.

因此可以求得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\ .$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ \text{（}f'(x_0)\neq 0\text{）}.$$

特别的，若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线的方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$.

例 2.1.10 求曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线和法线方程.

解 由 $y'=2x$，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 的切线与法线的斜率分别为

$$k_1=y'\big|_{x=2}=2,\ k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}\ .$$

切线方程为

$$y-1=2(x-1)\ ,$$

即

$$2x-y-1=0\ .$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\ ,$$

即

$$x+2y-3=0\ .$$

2.1.4 可导与连续的关系

若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

根据函数极限与无穷小间的关系，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\ ,$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小．从而有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\ ,$$

因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\right]=0\ ,$$

因此有下面的定理.

定理 2.1.2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定理的逆命题不一定成立．例如由例 2.1.4 知函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，但在 $x=0$ 处连续.

例 2.1.11 函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 处不可导.

解 在点 $x=0$ 处有

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\frac{1}{h^{2/3}},$$

因而，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}}=+\infty$，即导数为无穷大（注意，导数不存在）. 用几何图形表示即曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$.

由此可见，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

习题 2.1

1．设某种子厂生产 x 单位产品所花费的成本是 $f(x)$ 元（函数 $f(x)$ 称为成本函数），成本函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在经济学中称为边际成本．试说明边际成本 $f'(x)$ 的实际意义.

2．求下列函数的导数：

（1） $y=\log_3 x$； （2） $y=3^x\mathrm{e}^x$；

（3） $y=\sqrt[3]{t^2}$； （4） $y=\cos x$.

3．下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按导数定义观察下列极限：

（1） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$； （2） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

4．求曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在点（1，1）处的切线方程与法线方程.

5．讨论下列函数在 $x=0$ 处是否连续、是否可导？

（1） $y=|\sin x|$； （2） $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

6．设 $f(t)=\begin{cases} \mathrm{e}^t-1, & t<0, \\ t+a, & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ b\sin(t-1)+1, & t\geqslant 1, \end{cases}$ 求 a，b，使得 $f(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处可导.

7．设 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{1-x}$.

2.2 函数的求导法则

在本节中，将介绍求导数的几个基本法则以及前一节中未讨论过的几个基本初等函数的导数公式.

2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2.2.1 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处均可导，则它们的和、差、积、商（当分母不为零时）都在点 x 处可导，且

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ （$v\neq 0$）.

下面我们给出法则（3）的证明，其余的留给读者自己证.

证明 令 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，对自变量 x 的增量 Δx，则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{1}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]v(x)-u(x)\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{v(x+\Delta v)v(x)\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta v)v(x)}\\&=\frac{u'v-uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

特别地，若 $u(x)=1$，则可得公式

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}\quad（v\neq 0）.$$

法则（1），（2）均可推广到有限多个可导函数的情形.

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 在点 x 处均可导，则

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w',$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

例 2.2.1 设 $y=x^{\frac{1}{2}}-\sin x+\ln x$，求 y'.

解 $y'=(x^{\frac{1}{2}})'-(\sin x)'+(\ln x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\cos x+\dfrac{1}{x}$.

例 2.2.2 设 $y=5x^3 2^x$，求 y'.

解 $y'=5(x^3)'2^x+5x^3(2^x)'=15x^2 2^x+5x^3 2^x\ln 2$.

例 2.2.3 设 $y=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$，求 y'.

解 $y'=(\mathrm{e}^x)'(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)'$

$$=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$$
$$=2\mathrm{e}^x\cos x\ .$$

例 2.2.4 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\ .$$

即
$$(\tan x)'=\sec^2 x\ .$$

类似地可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

例 2.2.5 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\tan x=\sec x\cdot\tan x\ .$$

即
$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x\ .$$

类似地可得 $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$.

2.2.2 复合函数的导数

定理 2.2.2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad y'_x=y'_u\cdot u'_x\ .$$

证明 $y=f(u)$ 可导，有
$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha\ ,$$
其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$. 上式两边同乘 Δu 得
$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u\ ,$$
于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$
因为可导必连续，所以当 $\Delta x\to 0$ 时， $\Delta u\to 0$ ，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$ ，从而有
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\ .$$

上式表明，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，由表及里，先求出 $y=f(u)$ 对 u 的导数，再求 $u=\varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可.

以上法则还可记为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ 或 $\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}' = f'(u)\cdot\varphi'(x)$.

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形．例如，设 $y = f(u)$，$u=\varphi(v)$， $v=\psi(x)$，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

例 2.2.6　设 $y=\ln(1+x^3)$，求 y' .

解　$y=\ln(1+x^3)$ 可看作是由 $y=\ln u$，$u=1+x^3$ 复合而成的，因此

$$y'=(\ln u)'_u\cdot(1+x^3)'_x=\frac{1}{u}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{1+x^3}.$$

对复合函数的复合过程熟悉后，就不必再写中间变量，可直接按复合步骤求导.

例 2.2.7　$y=\cos\sqrt{x^2+2}$，求 y' .

解　$y'=-\sin\sqrt{x^2+2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x=-\dfrac{x\sin\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$.

例 2.2.8　$y=\ln\sin \mathrm{e}^x$，求 y' .

解　$y'=\dfrac{1}{\sin \mathrm{e}^x}\cdot(\cos \mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cot \mathrm{e}^x$.

例 2.2.9　$y=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}$，求 y' .

解　$y'=(\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}})'=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}\cdot\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

例 2.2.10　证明 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$　（$x>0$）.

证明　$(x^\mu)'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=x^\mu\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$.

2.2.3　反函数的求导法则

定理 2.2.3　如果单调连续函数 $x=f(y)$ 在某区间内可导，且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=\varphi(x)$ 在对应的区间内可导，且有

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'(y)}\ \text{或}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明　因 $y=\varphi(x)$ 是 $x=f(y)$ 的反函数，利用复合函数求导法则，复合函数 $x=f(y)=f[\varphi(x)]$ 对 x 求导，得

$$1=f'_y\cdot\varphi'_x\ \text{或}\ 1=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

因此

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f'(y)\neq 0\right).$$

例 2.2.11　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，且 $(\sin y)'_y=\cos y\neq 0$，因此在对应的区间 $(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即
$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得
$$(\arccos x)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 2.2.12　求函数 $y=\arctan x$ 的导数.

解　$y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，因此在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，有

$$(\arctan x)'_x=\frac{1}{(\tan y)'_y}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

即
$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

同理可得
$$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2.2.4　初等函数的导数

根据函数的四则运算求导法则、复合函数的求导法则以及反函数的求导法则，现将基本导数公式归纳如下.

（1）$(C)'=0$（C 为常数）；　　（2）$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$（μ 为常数）；

（3）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　　（4）$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

（5）$(a^x)'=a^x\ln a$；　　（6）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；　　（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$；　　（10）$(\cot x)'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；　　（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　（16）$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$．

除以上基本导数公式要熟练掌握外，还需熟练运用函数的四则运算求导法则与复合函数的求导法则，以此求初等函数的导数．

例 2.2.13　$y=(x^2+\cos x)^3$，求 y'．

解　$$y'=[(x^2+\cos x)^3]'=3(x^2+\cos x)^2(x^2+\cos x)'=3(x^2+\cos x)^2(2x-\sin x)\text{．}$$

例 2.2.14　$y=\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，求 y'．

解　$$y'=(\mathrm{e}^{x^2})'+\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)'=2x\mathrm{e}^{x^2}+\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\text{．}$$

例 2.2.15　$y=3^{-x}\arcsin\dfrac{x^2}{3}$，求 y'．

解　$$y'=(3^{-x})'\arcsin\frac{x^2}{3}+\left(\arcsin\frac{x^2}{3}\right)'3^{-x}=(-3^{-x}\ln 3)\arcsin\frac{x^2}{3}+\frac{\frac{2x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^4}{9}}}3^{-x}$$
$$=3^{-x}\left(\frac{2x}{\sqrt{9-x^4}}-\ln 3\cdot\arcsin\frac{x^2}{3}\right)\text{．}$$

例 2.2.16　$y=\dfrac{\ln^2 x}{x}+\sin^2 x$，求 y'．

解　$$y'=\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)'+(\sin^2 x)'=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln^2 x}{x^2}+2\sin x\cos x$$
$$=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}+\sin 2x\text{．}$$

例 2.2.17　$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'．

解　$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\text{．}$$

例 2.2.18　设 $f(x)$ 可导，求 $y=\sin f(x)+f(\sin^2 x)$ 的导数．

解　$$y'=\cos f(x)\cdot f'(x)+f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x=f'(x)\cos f(x)+f'(\sin^2 x)\sin 2x\text{．}$$

例 2.2.19 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,

当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,

即 $$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

习题 2.2

1．求下列函数的导数：

（1） $y=xa^x+\mathrm{e}^x$ ； （2） $y=3x\tan x+2\sec x-4$ ；

（3） $y=3x^3-2^x+3\mathrm{e}^x$ ； （4） $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}+\dfrac{2}{x}$ ；

（5） $y=x^2\ln x$ ； （6） $y=5\mathrm{e}^x\cos x$ ；

（7） $y=\dfrac{\ln x}{x}$ ； （8） $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\ln 3$ ；

（9） $y=\dfrac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}$ ； （10） $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$ ；

（11） $y=x^2\log_2 x$ ； （12） $y=x\arctan x$ ；

（15） $y=3^x\arcsin x-\sqrt[3]{x^2}$ ； （16） $y=\arcsin x+\arccos x$.

2．设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

（1） $y=[f(x)]^2$ ； （2） $y=\mathrm{e}^{f(x)}$ ；

（3） $y=\arctan[f(x)]$ ； （4） $y=\ln[1+f^2(x)]$ ；

（5） $y=f(\sqrt{x}+1)$ ； （6） $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

3．求下列函数的导数：

（1） $y=(x^2-x)^5$ ； （2） $y=2\sin(3x+6)$ ；

（3） $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$ ； （4） $y=\ln(\tan x)$ ；

（5） $y=\sqrt{1+\ln x}$ ； （6） $y=x\mathrm{e}^{-2x}$ ；

（7） $y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1}$ ； （8） $y=\ln(2^{-x}+3^{-x}+4^{-x})$ ；

（9）$y=2^{\sqrt{x+1}}-\ln(\sin x)$；　（10）$y=(\arcsin\frac{x}{2})^2$；

（11）$y=\ln\ln\ln x$；　（12）$y=\mathrm{e}^{2\arctan\sqrt{x}}$；

（13）$y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)$；　（14）$y=(\arctan\frac{x}{2})^2$；

（15）$y=\cos^3 x$；　（16）$y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

4．已知 $y=x^2+a$ 与 $y=b\ln(1+2x)$ 在 $x=1$ 点相切，求 a，b 的值.

5．设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 可导，且 $f^2(x)+\varphi^2(x)\neq 0$，求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+\varphi^2(x)}$ 的导数.

2.3　高阶导数

2.3.1　高阶导数的概念

我们知道，加速度 a 是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数，而变速直线运动的速度 $v(t)$ 又是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，从而

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \text{或} a=(s')'.$$

这种导数的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})$ 或 $(s')'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} \text{或} s''(t).$$

所以，直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，我们就称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y''，$f''(x)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]',$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

我们称 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**一阶导数**.

类似地，二阶导数的导数，叫做**三阶导数**，三阶导数的导数叫做**四阶导数**，…，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数称为 n **阶导数**，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\cdots,\ y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数，也说是函数 $f(x)$ 为 n 阶可导．如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数．将二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**．

函数的高阶导数就是将函数逐次求导，因此，导数运算法则与导数基本公式仍然适用于高阶导数的计算．

例 2.3.1 设 $y=ax+b$，求 y''．

解 $y'=a, y''=0$．

例 2.3.2 设 $y=e^{-x}\cos x$，求 y''．

解 $y'=-e^{-x}\cos x+e^{-x}(-\sin x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$，

$y''=e^{-x}(\cos x+\sin x)-e^{-x}(-\sin x+\cos x)=2e^{-x}\sin x$．

例 2.3.3 设 $y=f(\sin x)$，求 y''．

解 $y'=f'(\sin x)\cos x$，

$y''=f''(\sin x)\cos^2 x-f'(\sin x)\sin x$．

例 2.3.4 设 $y=e^x$，求 $y^{(n)}$．

解 $y'=e^x$，$y''=e^x$，$y'''=e^x$，$y^{(4)}=e^x$．

一般地，可得 $y^{(n)}=e^x$．即

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

例 2.3.5 求正弦与余弦函数的 n 阶导数．

解 $y=\sin x$，$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

即 $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得 $$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 2.3.6 求幂函数 $y=x^\mu$ 的 n 阶导数（n 是正整数）．

解 $y = x^{\mu}$（μ 是任意常数），那么

$$y' = \mu x^{\mu-1}，y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}，\cdots，y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}，$$

即
$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

当 $\mu = n$ 时，得到 $(x^n)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$，

而
$$(x^n)^{(n+1)} = 0.$$

例 2.3.7 求函数 $y = \ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y = \ln(1+x)$，$y' = \dfrac{1}{1+x}$，$y'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$y''' = \dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$，$y^{(4)} = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$，

一般地，可得
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即
$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

2.3.2 高阶导数的运算法则

若函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，则 $u(x)+v(x)$ 及 $u(x)-v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数，且

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

但乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 的 n 阶导数并不如此．由

$$(uv)' = u'v + uv'$$

得出

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$
$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

上式称为**莱布尼茨**（Leibniz）**公式**．这个公式可按二项式展开定理记忆：把二项式

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k}v^k,$$

中的 k 次幂换成 k 阶导数（零阶导数理解为函数本身），再把左端的 $u+v$ 换成 uv，这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

例 2.3.8 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}, v = x^2$，则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \ (k = 1, 2, \cdots, 20),$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v^{(k)} = 0 \ (k = 3, 4, \cdots, 20),$$

代入莱布尼茨公式，得

$$y^{(20)} = (x^2 e^{2x})^{(20)} = 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot x^2 + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).$$

习题 2.3

1．求下列函数的二阶导数：

（1）$y = xa^x + 7e^x$；　（2）$y = 3x \tan x + \sec x$；

（3）$y = 3e^x \cos x$；　（4）$y = \dfrac{\ln x}{x}$；

（5）$y = \dfrac{e^x}{x^2} + \ln 5$；　（6）$y = x^2 \ln x \cos x$；

（7）$y = \dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$；　（8）$y = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$；

（9）$y = x^2 \log_3 x$；　（10）$y = x \arctan x$；

（11）$y = \arcsin x + \arccos x$；　（12）$y = x \cos x$；

（13）$y = e^{2x-1}$；　（14）$y = (1 + x^2) \arctan x$；

（15）$y = xe^{x^2}$；　（16）$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$．

2．设 $f(x) = (x + 10)^6$，求 $f'''(2)$．

3．设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$：

（1）$y = f(x^2)$；　（2）$y = \ln[f(x)]$．

4．证明 $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ 满足方程 $y'' + y' + 2e^{-x} \cos x = 0$．

5．密度大的陨石进入大气层时，当它离地心为 s 千米时的速度与 $\sqrt{s}$ 成反比，试证陨石的加速度与 s^2 成反比．

6．假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$，试求质点运动的加速度．

7．求下列函数所指定的阶的导数：

（1）$y = e^x \cos x$，求 $y^{(4)}$；

（2）$y = x^2 \sin 2x$，求 $y^{(50)}$．

8．求函数 $f(x) = x^2 \ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$（$n \geqslant 3$）．

2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

2.4.1 隐函数的导数

前面我们遇到的函数，形如 $y=\sin x, y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 等．将这种等号左端是因变量的符号，右端是含有自变量的式子的函数叫做显函数．但有些函数的表达方式却不是这样，如，方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应．这样的函数称为**隐函数**．

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，总有满足这方程的唯一的 y 与之对应，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数．

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化．例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$．隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的．但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数．下面通过具体例子来说明隐函数求导的方法．

例 2.4.1 求由方程 $e^y+xy=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$．

解 方程两边对 x 求导数，注意 y 是 x 的函数，得

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

从而 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x+e^y}$ （$x+e^y\neq 0$）．

例 2.4.2 设 $y=\arctan(x+2y)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

解 方程两边对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{1+(x+2y)^2}(1+2y'),$$

解得

$$y'=\frac{1}{(x+2y)^2-1} \quad （(x+2y)^2\neq 1）.$$

例 2.4.3 求圆 $x^2+y^2=1$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程．

解 方程两边对 x 求导，得

$$2x+2y\cdot y'=0.$$

所求切线的斜率

$$k = y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所求切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-0)$，即

$$2\sqrt{3}y+2x-3=0.$$

例 2.4.4 求由方程 $x-y+\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 先求 y'，方程两边对 x 求导，得

$$1-y'+\cos y\cdot y'=0.$$

解得 $y'=\dfrac{1}{1-\cos y}$.

再求 y''，注意到 y 是 x 的函数，有

$$y''=\frac{-1}{(1-\cos y)^2}\cdot(1-\cos y)'=\frac{-\sin y}{(1-\cos y)^2}\cdot y',$$

将 y' 的表达式代入，得 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=y''=-\dfrac{\sin y}{(1-\cos y)^3}$.

例 2.4.5 设 $\mathrm{e}^{x+y}-xy=1$，求 $y''(0)$.

解 方程两边对 x 求导，得 $(1+y')\mathrm{e}^{x+y}-y-xy'=0$.

上式两边再对 x 求导，得

$$(1+y')^2\mathrm{e}^{x+y}+y''\mathrm{e}^{x+y}-2y'-xy''=0.$$

令 $x=0$，可得 $y=0$，$y'(0)=-1$，将这些值代入上式得 $y''(0)=-2$.

在计算幂指函数的导数以及某些连乘、连除、带根号函数的导数时，可以采用先取对数再求导的方法，简称**对数求导法**.

例 2.4.6 设 $y=\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+1)(x^2+3)}}$，求 y'.

解 将函数两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)+\ln(3x-4)-\ln(x+1)-\ln(x^2+3)\right],$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+3}\right],$$

所以
$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+1)(x^2+3)}}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+3}\right).$$

例 2.4.7 求 $y=x^{\sin x}$ 的导数.

解 两边取对数得 $\ln y=\sin x\ln x$.

上式两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x},$$

所以

$$y'=y\left(\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x}\right).$$

2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数

若方程 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 确定 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in(\alpha,\beta)$$

所确定的函数．下面来讨论由参数方程所确定的函数的导数.

设 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数，在 $t\in(\alpha,\beta)$ 中，则复合函数 $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\left[\psi(\varphi^{-1}(x))\right]'=\psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))'\\&=\psi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad(\varphi'(t)\neq 0).\end{aligned}$$

于是由参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 2.4.8 求 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(a\sin^3 t)_t'}{(a\cos^3 t)_t'}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$.

切线的斜率为 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$，法线的斜率为 $-\dfrac{1}{k}=1$.

所以切线方程为 $y-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=-\left(x-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$，即 $x+y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

法线方程为 $y-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=x-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$，即 $y=x$.

例 2.4.9 已知 $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(b\cos t)'}{(a\sin t)'} = -\dfrac{b\sin t}{a\cos t} = -\dfrac{b}{a}\tan t$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\tan t\right)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b}{a}\cdot\sec^2 t\cdot\frac{1}{-a\sin t} = \frac{b}{a^2}\cdot\sec^2 t\csc t .$$

习题 2.4

1．求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $xy = \mathrm{e}^{x+y}$；　　（2） $y = 1 - x\mathrm{e}^y$.

2．求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a, \dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

3．求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数：

（1） $x^2 - y^2 = 1$；　　（2） $y = 1 + x\mathrm{e}^y$.

4．用对数求导法求下列函数的导数.

（1） $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；　　（2） $y = \dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

（3） $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$；　　（4） $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$.

5．求下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$：

（1） $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^2; \end{cases}$　　（2） $\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta), \\ y = \theta\cos\theta. \end{cases}$

6．已知 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 求当 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值.

7．写出曲线 $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程和法线方程.

8．求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1）$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

9．求参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的三阶导数 $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$．

2.5　函数的微分

在实际应用中，常遇到与导数密切相关的一类问题，这就是当自变量有一个微小的改变量 Δx 时，要计算相应的函数的改变量 Δy．但是求 Δy 是比较困难的，需要找出一种便于计算函数改变量的近似公式.

2.5.1　微分的概念

先考察一个具体问题.

例 2.5.1　设有一个边长为 x_0 的正方形金属片，受热后边长伸长了 Δx，求其面积增加了多少？

解　由图 2.4 可以看出，受热后，边长由 x_0 伸长到 $x_0 + \Delta x$，面积 A 相应的增量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

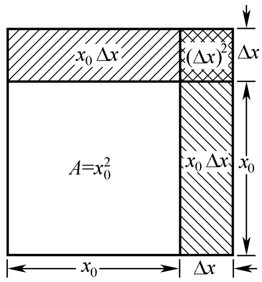


图 2.4

上式可分成两部分：第一部分是 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$，当 $\Delta x \to 0$ 时与 Δx 为同阶无穷小；第二部分 $(\Delta x)^2$，当 $\Delta x \to 0$ 时是 Δx 的高阶无穷小．由此可见，当 $|\Delta x|$ 很小时，第二部分的绝对值要比第一部分的绝对值小得多，可以忽略不计，因此可用 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$ 作为 ΔA 的近似值，即

$$\Delta A \approx 2x_0\Delta x . \tag{2.5.1}$$

显然，$2x_0\Delta x$ 是容易计算的，它是边长 x_0 有增量 Δx 时，面积 ΔA 的增量的主

要部分（亦称线性主部）.

由此引入函数微分的概念.

定义 2.5.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}，即 \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

由微分定义，（2.5.1）式可写成

$$\Delta A\approx \mathrm{d}A\Big|_{x=x_0}.$$

定理 2.5.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.

证明 （必要性） 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，由可微的定义知

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

则有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，令 $\Delta x\to 0$ 取极限得：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$，即 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并且 $f'(x_0)=A$，$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

（充分性）若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，由导数定义知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，由极限与无穷小的关系可得 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

从而有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$，显然 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$. 即 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，且 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

当函数 $y=x$ 时，$y'=1$，此时 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=y'\Delta x=\Delta x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，称为**自变量的微分**，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分又可写成

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可微，则称该函数在 (a,b) 内可微，或称函数 $f(x)$ 是在 (a,b) 内的**可微函数**. 此时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点 x 处的微分记为 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x,$$

上式两端同除以自变量的微分 $\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

这就是说，函数 $f(x)$ 的导数等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为**微商**.

例 2.5.2 设 $y=\sqrt{4+x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 dy .

解 $\dfrac{dy}{dx}=(\sqrt{4+x^2})'=\dfrac{1}{2\sqrt{4+x^2}}(4+x^2)'=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$，

$$dy=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx .$$

例 2.5.3 求当 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时函数 $y=x^2$ 的微分.

解 函数的微分

$$dy=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x .$$

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=0.2 .$$

例 2.5.4 半径为 r 的圆的面积为 $A=\pi r^2$，当半径增大 Δr 时，求圆面积的增量与微分.

解 面积的增量

$$\Delta A=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2 .$$

面积的微分

$$dA=A'\cdot\Delta r=2\pi r dr.$$

2.5.2 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.5 所示．过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $M(x,y)$ 处作切线 MT，设 MT 的倾角为 α .

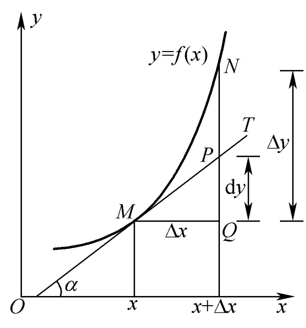


图 2.5

当自变量 x 有增量 Δx 时，切线 MT 的纵坐标有增量

$$QP=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x=dy .$$

因此，微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 几何上表示当 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M(x,y)$ 处的切线的纵坐标的增量.

2.5.3　微分的基本公式与微分法则

1. 微分的基本公式

由函数 $y=f(x)$ 的微分表达式看出，$\mathrm{d}y$ 等于导数 $f'(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$，所以根据导数公式和运算法则，就能得相应的微分公式和微分运算法则.

（1）$\mathrm{d}(C)=0$（C 为常数）；

（2）$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$（$\mu\in\mathrm{R}$）；

（3）$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$（$a\neq 1$）；

（4）$\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$；

（6）$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

（8）$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

（10）$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（11）$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$；

（12）$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$；

（13）$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（14）$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（15）$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（16）$\mathrm{d}(\operatorname{arc}\cot x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u(x)=u$，$v(x)=v$ 均可微，则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u \quad (C\text{ 为常数});$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v\neq 0).$$

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

或
$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u,\ \text{其中 } \mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

可见不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式，这个性质称为**一阶微分形式的不变性**.

利用这个性质，可以比较方便地求一些复合函数的微分、隐函数的微分以及它们的导数.

例 2.5.5　$y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln(1+\mathrm{e}^{x^2}))=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}2x\mathrm{d}x=\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x$.

例 2.5.6 $y=\mathrm{e}^{1-2x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-2x}\cos x)=\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-2x})+\mathrm{e}^{1-2x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=(\cos x)\mathrm{e}^{1-2x}(-2\mathrm{d}x)+\mathrm{e}^{1-2x}(-\sin x\mathrm{d}x)$

$=-\mathrm{e}^{1-2x}(2\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$.

例 2.5.7 求由方程 $x^3+2xy-2y^3=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数与微分.

解 对方程两边求微分，得

$$3x^2\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x-6y^2\mathrm{d}y=0\text{，}$$

所以微分为

$$\mathrm{d}y=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}\mathrm{d}x\text{，}$$

导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}.$$

例 2.5.8 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

（1）$\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$；　　（2）$\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$

解（1）因为 $\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$，所以

$$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

一般地，有 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)=x\mathrm{d}x$（$C$ 为任意常数）.

（2）因为 $\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t$，所以 $\cos\omega t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$.

一般地，有 $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t$（$C$ 为任意常数）.

2.5.4 微分在近似计算中的应用

在实际问题中，经常利用微分作近似计算.

由微分的定义可知，当 $|\Delta x|$ 很小时，

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x\text{，}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

记 $x_0+\Delta x=x$，则上式又可写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

因此在工程上有一些常用的近似公式，当 $|x|$ 很小时，

（1）$\sin x\approx x$（x 用弧度作单位来表示）；

（2）$\tan x\approx x$（x 用弧度作单位来表示）；

（3）$e^x\approx 1+x$；

（4）$\ln(1+x)\approx x$；

（5）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$.

例 2.5.9 计算 $\sin 46^\circ$ 的近似值.

解 将 46° 转化成弧度为

$$46^\circ=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}.$$

取 $x_0=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$，所以

$$\sin 46^\circ\approx\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.719.$$

例 2.5.10 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt{1+x}$，利用近似公式中（5），取 $x=0.05$，得

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025.$$

例 2.5.11 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.1cm，估计一下，每只球需用铜多少克（铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm^3}$）.

解 设球体的半径为 R，则球体的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，从而体积增量为

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.1}}=4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.1}}\approx 1.3\ (\mathrm{cm^3}).$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 1.3=11.6\ (\mathrm{g}).$$

习题 2.5

1．已知 $y=x^3-x$，计算在当 Δx 分别等于 $1, 0.1, 0.01$ 时的 Δy，$\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分：

（1） $y = x\sin 2x$；（2） $y = \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$；

（3） $y = \ln^2(1-x)$；（4） $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

（5） $y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；（6） $y = x^2\mathrm{e}^{2x}$；

（7） $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$；（8） $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

3．求下列微分关系式中的未知函数 $f(x)$：

（1） $x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；（2） $\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；

（3） $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}f(x)$；（4） $\sec^2 3x\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；

（5） $\sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；（6） $\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}f(x)$；

（7） $\tan x\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$；（8） $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}f(x)$.

4．设 $y = y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y^2) = x+y$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}$.

5．利用微分求近似值：

（1） $\sqrt[6]{65}$；（2） $\lg 11$.

6．计算球体体积时，要求精确度在2%以内．问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

复习题 2

1．在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

（1） $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的________条件； $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件；

（2） $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的________条件；

（3） $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的________条件.

2．设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$（$n \geqslant 2$），则 $f'(0) =$________.

3．选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是（　　）.

A． $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\dfrac{1}{h}) - f(a)\right]$ 存在；B． $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在；

C．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在；　D．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在．

4．求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$、$f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 是否存在：

（1）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5．讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性．

6．求下列函数的导数：

（1）$y=\dfrac{2\sec x}{1+x^2}$；　（2）$y=\arcsin(\sin x)$；

（3）$y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$；　（4）$y=x(\sin x+1)\csc x$；

（5）$y=x^{\frac{1}{x}}$；　（6）$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

（7）$y=e^{\tan\frac{1}{x}}$；　（8）$y=\tan^3(1-2x)$．

7．求下列函数的二阶导数：

（1）$y=\cos^2 x\cdot\ln x$；　（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$；

（3）$y=x^2\ln x$．

8．求下列函数的 n 阶导数：

（1）$y=\sqrt[m]{1+x}$；　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$．

9．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

（1）$ye^x+\ln y=1$；　（2）$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$．

10．求下列参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta; \end{cases}$　　　　（2）$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$

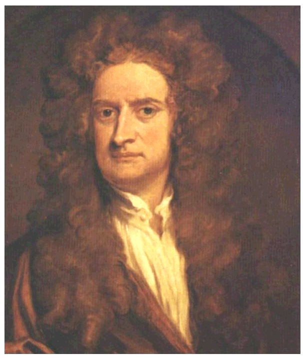
11．求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程．

12．求由方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

13．利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值．

数学家简介——牛顿

自然与自然规律为黑暗隐蔽，
上帝说，让牛顿来！
一切遂臻光明．
——英国诗人蒲柏（杨振宁译）



牛顿（Isaac Newton）（1643～1727）是英国数学家、物理学家、天文学家．1643 年 1 月 4 日牛顿生于英格兰林肯郡的伍尔索普；1727 年 3 月 31 日卒于伦敦．牛顿出身于农民家庭，幼年颇为不幸：他是一个遗腹子又是早产儿，3 岁时母亲改嫁，把他留给了外祖父母，从小过着贫困孤苦的生活．他在条件较差的地方学校接受了初等教育，中学时也没有显示出特殊的才华．1661 年牛顿考入剑桥大学三一学院，由于家庭经济困难，学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费．由于他学习勤奋，并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导，认真钻研了伽利略、开普勒、沃利斯、笛卡儿、巴罗等人的著作，还做了不少实验，打下了坚实的基础，1665 年获学士学位．1665 年，伦敦地区流行鼠疫，剑桥大学暂时关闭．牛顿回到伍尔索普，在乡村幽居的两年中，终日思考各种问题，探索大自然的奥秘．他平生三大发明，微积分、万有引力定律、光谱分析，都萌发于此，这时他年仅 23 岁．后来牛顿在追忆这段峥嵘的青春岁月时，深有感触地说：“当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时期更专心致志于数学和科学．”并说：“我的成功当归功于精力的思索．”“没有大胆的猜想就作不出伟大的发现．”1667 年，牛顿回到剑桥攻读硕士学位，在获得学位后，成为三一学院的教师，并协助巴罗编写讲义，撰写微积分和光学论文．牛顿的学术成就得到了巴罗的高度评价，巴罗在 1669 年 7 月向皇家学会数学顾问柯林斯（Collins）推荐牛顿的《运用无穷多项方程的分析学》时，称牛顿为“卓越天才”．巴

罗还坦然宣称牛顿的学识已超过自己，并在 1669 年 10 月把“卢卡斯教授”的职位让给了牛顿，牛顿当时年仅 26 岁.

牛顿发现微积分，首先得助于他的老师巴罗，巴罗关于“微分三角形”的深刻思想，给他极大影响；另外费马作切线的方法和沃利斯的《无穷算术》也给了他很大启发. 牛顿的微积分思想（流数术）最早出现在他 1665 年 5 月 21 日写的一页文件中. 他的微积分理论主要体现在《运用无穷多项方程的分析学》、《流数术和无穷级数》及《求曲边形的面积》三部论著里.

牛顿上述三个论著是微积分发展史上的重要里程碑，也为近代数学甚至近代科学的产生与发展开辟了新纪元. 正如恩格斯在《自然辩证法》中所说：“一切理论成就中未必再有像 17 世纪后半期微积分的发明那样可以被看作人类精神的最高胜利了.”

由于牛顿对科学作出了巨大贡献，因而受到了人们的崇敬：1688 年当选为国会议员，1689 年被选为法国科学院院士，1703 年当选为英国皇家学会会长，1705 年被英国女王封为爵士. 牛顿的研究工作为近代自然科学奠定四个重要基础：他创建的微积分，为近代数学奠定了基础；他的光谱分析，为近代光学奠定了基础；他发现的力学三大定律，为经典力学奠定了基础；他发现的万有引力定律，为近代天文学奠定了基础. 1701 年莱布尼茨说：“纵观有史以来的全部数学，牛顿做了一半多的工作.”而牛顿本人非常谦虚并在临终前说：“我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过像一个在海滨玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无涯的真理的大海，却还在我的前面未曾被我发现.”

牛顿终生未娶. 他死后安葬在威斯敏斯特大教堂之内，与英国的英雄们安葬在一起. 当时法国大文豪伏尔泰正在英国访问，他看到英国的大人物们都争抬牛顿的灵柩时感叹地评论说：“英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王.”牛顿是对人类科学做出卓越贡献的巨擘，得到了世人的尊敬和仰慕. 牛顿墓碑上拉丁语墓志铭的最后一句是：“他是人类的真正骄傲，让我们为之欢呼吧！”