第 1 章　行列式

行列式实质上是由一些数排列成的数表按一定法则计算得到的一个数，即是一种特定的算式．行列式在解析几何以及数学的其他分支中都扮演着很重要的角色．特别是在本课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量的线性相关性的一种重要工具．

1.1　二阶和三阶行列式

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学数学课程中已经涉及，本节通过二元、三元线性方程组的解来定义二阶、三阶行列式，它们是我们学习和讨论更高阶行列式的基础．

1.1.1　二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}（$i=1,2$; $j=1,2$）是未知量 x_j（$j=1,2$）的**系数**，b_i（$i=1,2$）是**常数项．**

在方程（1.1.1）的第一个方程和第二个方程的两边分别乘以 a_{22} 和 a_{12}，然后两式相减，消去 x_2 得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

用同样的方法消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可求得方程组（1.1.1）的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

在（1.1.2）式中分子、分母都是两对数的乘积之差，其中分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，它是由方程组（1.1.1）的系数确定的．那么规定**二阶行列式**为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

数 a_{ij}（$i=1,2$; $j=1,2$）称为这个行列式的**元素**.（横的称为**行**，纵的称为**列**），它的第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于行列式的第 i 行；它的第二个下标 j 称

为**列标**，表示该元素位于行列式的第 j 列．那么式（1.1.3）恰是行列式中**主对角线**（左上角至右下角的对角线）上两个数的乘积与**副对角线**（右上角至左下角的对角线）上两个数的乘积之差．

由二阶行列式的定义，将式（1.1.2）中的的分子分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2，\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$．则可以把线性方程组（1.1.1）的唯一解（1.1.2）式写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}，\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

其中 $D \neq 0$．

这个结论很容易记忆：x_1，x_2 的分母 D 是由方程组（1.1.1）的系数在方程组的一般形式下保持原来的相对位置不变所构成的二阶行列式（称为**系数行列式**），x_1 的分子 D_1 是方程组（1.1.1）的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1.1.1　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases}$$

解　因为线性方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7 \neq 0，$$

所以方程组有唯一解．

又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 16 = -11，\quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10，$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{7}，\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{7}.$$

1.1.2　三阶行列式

类似地，可定义三阶行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\ .$$

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 由三阶行列式的定义，可得

$$\begin{aligned} D &= 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times1\times3 - 1\times(-4)\times5 - 2\times3\times2 \\ &= 30 + 2 - 24 - 6 + 20 - 12 \\ &= 10. \end{aligned}$$

1.1.3 二阶与三阶行列式的关系

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式的定义为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (1.1.5)$$

由此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的**代数和**. 同时也看到三阶行列式的计算可以转化为二阶行列式的计算. 那么一个重要的问题是 n 阶行列式的计算能否转化为 $n-1$ 阶或更低阶行列式的计算呢？

为了进一步了解这三个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系，下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 a_{ij}（$i=1,2,3;\ j=1,2,3$）所在的第 i 行与第 j 列划去，剩下的元素保持原来的相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} . 记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ ，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是在 D 中划去元素 a_{12} 所在的第 1 行与第 2 列后剩下的元素所构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的概念，（1.1.5）式可以写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和．这个表达式通常称为：**行列式按第一行展开的展开式**．

例 1.1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1\times16-0+5\times(-4)=-4.$$

行列式按第一行展开的结果还可以进一步推广为如下**展开定理**：

定理 1.1.1 三阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,3), \tag{1.1.6}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,3). \tag{1.1.7}$$

证明 现证（1.1.7）式中 $j=2$ 的情况，其他情况可类似证明.

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{13}a_{21} \\ &=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}) \quad . \\ &=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}. \end{aligned}$$

展开式（1.1.6）称为**按第 i 行展开的展开公式**，展开式（1.1.7）称为**按第 j 列展开的展开公式**.

如果定义一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,|a_{22}| - a_{12}\,|a_{21}|\,.$$

例 1.1.4 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 把D按第二行展开，得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 20 - 12 - 12 = -4.$$

例 1.1.5 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零，故按第二列展开较简便，即

$$D = 4\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\times(-5) = -20\,.$$

1.2 n 阶行列式

二阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和；三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和．我们可以按照这个思路给出n阶行列式的定义.

1.2.1 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 由n^2个数a_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,n$）组成的n阶行列式记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.1}$$

当$n=1$时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

当$n\geqslant 2$时，$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$，（1.2.1）其中$A_{1j}$为$D$

的元素 a_{1j} 的代数余子式.

1.2.2 n 阶行列式展开定理

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

一般来说，低阶行列式比高阶行列式的计算要简单，根据上述定理，能够把 n 阶行列式用 $n-1$ 阶行列式来表示，从而将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式的计算.

例 1.2.1 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零，故按第二列展开较简便

$$D = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 37 + 46 = 83.$$

例 1.2.2 计算对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中行列式除主对角线上的元素外其余元素均为零.

解 根据 n 阶行列式的定义有

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ & a_{33} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.3 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中行列式主对角线以下的元素均为零.

解 根据定理 1.2.1，考虑到 D 的第一列除元素 a_{11} 外均为零，所以按第一列展开得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同样，对上式右端的 $n-1$ 阶行列式按第一列展开得到

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.3 行列式的性质

为了使行列式的计算更加简便，我们引进行列式的初等变换概念.

定义 1.3.1 行列式的初等行变换是指:

（1）用一个非零常数 k 遍乘行列式的某一行；

（2）互换行列式任意两行的位置；

（3）将行列式某一行加上另一行的 k 倍.

将定义 1.3.1 中的“行”换成“列”，即得行列式的初等列变换的定义.

行列式的初等行变换与初等列变换统称为**行列式的初等变换**.

由上节给出的几个例题可以看出，在行列式的计算过程中，为了计算简便，可选择含零元素较多的那一行（列）展开．本节将介绍行列式的性质，利用这些性质可以将一个行列式中某行（列）的元素尽可能多的化为零，以使行列式的计算变得简单.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将行列式 D 的相应的行变为相应的列，得到的新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T} .

行列式基本性质　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

由此性质可知，行列式的行与列具有相同的地位，也就是对行成立的性质，对列也成立，反之亦然.

例 1.3.1　计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中主对角线以上的元素均为零.

解　由行列式的基本性质及例 1.2.3 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.3.1　互换行列式的两行（列），行列式变号.

推论 1.3.1　若行列式中有两行（列）相同，则行列式等于零.

证明　设行列式 D 中有两行相同，把这两行互换得到行列式 D ，由此推得 $D=-D$ ，即 $2D=0$ ，故 $D=0$.

性质 1.3.2　行列式的某一行（列）乘以数 k ，所得到的行列式等于原行列式的 k 倍．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明　将上式左端的行列式按第 i 行展开，显然上式两端行列式第 i 行元素的代数余子式是相同的，故有

$$\text{左边}=a_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\text{右边}.$$

由性质 1.3.2，当 $k=0$ 时，可得下面的性质：

推论 1.3.2　若行列式中某一行（列）的元素全为零，则行列式等于零.

由性质 1.3.2 和推论 1.3.1 可得.

推论 1.3.3　若行列式中有两行（列）对应成比例，则行列式等于零.

性质 1.3.3　行列式某一行（列）加上另一行（列）的 λ 倍，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

证明　对右端的行列式按第 i 行展开有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda a_{kj})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})+\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{kj}A_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})+\lambda\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij}),$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

由推论 1.3.1 有

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}A_{ij})=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0.$$

因此性质得证.

这个性质的证明用到从行列式的展开式中找出原行列式的技巧，应用这个性质的证明方法，还可以得出下述行列式的性质.

推论 1.3.4　若行列式 D 中某一行（列）的每个元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和，则行列式 D 可分解成两个行列式 D_1 与 D_2 之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以上我们得到了行列式的主要性质. 行列式的这三个性质说明三种初等变换对行列式的值的影响. 我们可以应用这三个性质，将行列式，特别是数字行列式

通过初等行变换化为上（下）三角行列式，然后由例 1.2.3 与例 1.3.1 计算行列式.

1.4　行列式的计算

首先我们给出一个与行列式展开定理有关的一个定理.

定理 1.4.1　行列式的某一行（列）的每个元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \ne j).$$

证明　设行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

将 D 按第 j 行展开，得到

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn},$$

将上式中 D 的第 j 行元素 $a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn}$ 换成第 i 行的对应元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$，即有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

由于上式右端的行列式第 i 行和第 j 行相同，由推论 1.3.1 知该行列式等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \ne j).$$

所以定理 1.4.1 与行列式展开定理可以统一地写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ D, & i = j. \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ D, & i = j. \end{cases}$$

行列式的计算是一个专门的课题，有很多理论和计算方法，这里只按照本课程的目标要求，介绍一些基本的方法．为了叙述方便，下面约定一些运算符号：

$r_i+\lambda r_j$ 表示将行列式的第 j 行的元素乘以 λ 后加到第 i 行对应元素上去；

$c_i+\lambda c_j$ 表示将行列式的第 j 列的元素乘以 λ 后加到第 i 列对应元素上去；

$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示互换第 i 、 j 两行对应元素；

$c_i \leftrightarrow c_j$ 表示互换第 i 、 j 两列对应元素；

$r_i \times \lambda$ 表示用数 λ 乘第 i 行的每个元素；

$c_i \times \lambda$ 表示用数 λ 乘第 i 列的每个元素；

$r(i)$ 表示按第 i 行展开；

$c(i)$ 表示按第 i 列展开．

根据行列式的性质 1.3.1、性质 1.3.2 与性质 1.3.3，我们总可以把给定的行列式化为三角行列式的形式，从而能够简便地计算行列式．

化行列式为上三角形行列式的步骤如下：

（1）如果第一列第一个元素为零，先将第一行与其他行交换使得第一列第一个元素不为零；

（2）把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使得第一列除第一个元素外其余元素全为零；

（3）用上面的两个步骤继续处理除去第一行和第一列后余下的低一阶的行列式．

重复以上三个步骤，直至使它成为上三角形行列式，这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值．

例 1.4.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 利用化行列式为上三角形行列式的步骤进行计算．

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4+(-1)\times r_1}{\overset{r_3+(-4)\times r_1}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{r_4+(-1)\times r_2}{\overset{r_3+(-5/2)\times r_2}{=\!=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-5/16)\times r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{16} \end{vmatrix} = -[1\times 2\times(-16)\times\frac{13}{16}] = 26.$$

如果直接应用行列式展开定理计算行列式，运算量较大．因此，计算行列式时，一般先用行列式的性质将行列式中某一行（列）化为仅含一个非零元素，再按此行（列）展开，化为低一阶的行列式，如此继续下去直到化为三阶或二阶行列式.

例 1.4.2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1-2c_3]{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r(3)} (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c(3)} (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40 .$$

例 1.4.3　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是各行及各列 4 个数的和都是 5，将第 2、3、4 列同时加到第 1 列，将公因子 5 提出，然后第 2、3、4 列都减去第一列，就将行列式化为下三角形行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-c_1]{c_2-c_1,c_3-c_1} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\times 1^3 = 5.$$

例 1.4.4　证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

证明　对等式左边行列式按第 1 行展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{r(1)} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r(1)} a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

例 1.4.5　计算 n 阶**范德蒙德**（Vandermonde）行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xlongequal[(i=n,n-1,\cdots,2)]{r_i+(-a_n)r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ a_1^2-a_1a_n & a_2^2-a_2a_n & \cdots & a_{n-1}^2-a_{n-1}a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2}-a_1^{n-3}a_n & a_2^{n-2}-a_2^{n-3}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}-a_{n-1}^{n-3}a_n & 0 \\ a_1^{n-1}-a_1^{n-2}a_n & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_{n-1}^{n-2}a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c(n)} (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & a_3-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & a_3(a_3-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3}(a_1-a_n) & a_2^{n-3}(a_2-a_n) & a_3^{n-3}(a_3-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & a_3^{n-2}(a_3-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}.$$

将上式中每列的公因子提出来，得到

$$D_n=(-1)^{1+n}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_{n-1}^{n-3} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix},$$

$$=(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)\cdots(a_n-a_{n-1})D_{n-1},$$

其中 D_{n-1} 为 $n-1$ 阶范德蒙德行列式．这样我们建立了 D_n 与 D_{n-1} 之间的递推公式．重复上面的计算过程得

$$D_{n-1}=(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)(a_{n-1}-a_3)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})D_{n-2},$$

$$\cdots\cdots$$

依此类推，最后得到

$$\begin{aligned} D_2&=(a_2-a_1)D_1 \\ &=a_2-a_1. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} D_n=&(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)\cdots(a_n-a_{n-1}) \\ &\cdot(a_{n-1}-a_1)(a_{n-1}-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ &\cdot(a_{n-2}-a_1)\cdots(a_{n-2}-a_{n-1}) \\ &\cdots\cdots \\ &\cdot(a_3-a_1)(a_3-a_2) \\ &\cdot(a_2-a_1), \end{aligned}$$

上式右边所有可能的差 (a_j-a_i)（$1\leqslant i<j\leqslant n$）的乘积，记为

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

即

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

若由最后一行开始，每一行减去它的相邻的前一行乘以 a_1 ，可将 D_n 的第一列左上角 1 下面的元素全部化为零，可得另外一种解法.

1.5　克拉默法则

设含有 n 个未知数 n 个方程的**线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.5.1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是**未知量**，系数的第一个下标表示方程的序数，第二个下标与相应的未知量的下标相同， $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为**常数项**.

线性方程组（1.5.1）的系数在保持原来的相对位置不变的情况下构成行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为线性方程组（1.5.1）的**系数行列式**．令

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & b_{n-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里 D_j （ $j = 1, 2, \cdots, n$ ）是把系数行列式 D 中的第 j 列的元素换成线性方程组（1.5.1）的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的 n 阶行列式.

定理 1.5.1　（克拉默(Gramer)法则）若线性方程组(1.5.1)的系数行列式 $D \neq 0$ ，则线性方程组（1.5.1）有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.5.2}$$

例 1.5.1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 2, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&2&-3&-1\\1&2&-1&-1\\0&1&0&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&1&0&-3\\0&2&-1&-1\\0&2&-3&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+(-2)r_2]{r_3+(-2)r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&1&0&-3\\0&0&-1&5\\0&0&-3&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+(-3)r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\0&1&0&-3\\0&0&-1&5\\0&0&0&-10\end{vmatrix}=-10\neq 0.$$

所以方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&-2&1\\2&1&0&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=-8\text{，}\quad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&1&-2&1\\1&2&0&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=-9\text{，}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&0&1&-1\end{vmatrix}=-5\text{，}\quad D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&0&2\\1&0&1&1\end{vmatrix}=-3\,.$$

根据克拉默法则，方程组的唯一解是

$$x_1=\frac{4}{5}\text{，}\quad x_2=\frac{9}{10}\text{，}\quad x_3=\frac{1}{2}\text{，}\quad x_4=\frac{3}{10}\,.$$

克拉默法则的逆否命题可叙述为：**若线性方程组（1.5.1）无解或解不唯一，则它的系数行列式必为零.**

当线性方程组（1.5.1）的常数项全为零时，方程组（1.5.1）成为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}\tag{1.5.3}$$

称方程组（1.5.3）为 n 元**齐次线性方程组.** 相应地，当方程组的常数项不全为零时，称方程组（1.5.1）为 n 元**非齐次线性方程组.**

显然 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是齐次线性方程组（1.5.3）的解，称为（1.5.3）的**零解**. 若有一组不全为零的数满足（1.5.3），则它称为（1.5.3）的**非零解**. 齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解.

由于方程组（1.5.3）是方程组（1.5.1）的特殊情况，所以由克拉默法则即可得出如下推论.

推论 1.5.1 若齐次线性方程组（1.5.3）的系数行列式不等于零，则齐次线性

方程组（1.5.3）只有零解.

推论 1.5.2 若齐次线性方程组（1.5.3）有非零解，则齐次线性方程组（1.5.3）的系数行列式必为零.

推论 1.5.2 是推论 1.5.1 的逆否命题.

例 1.5.2 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + \lambda x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

有非零解，求 λ 的值.

解 由推论 1.5.2 知，它的系数行列式必为零. 而

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & \lambda & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(-2)r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3(\lambda-2),$$

令 $D=0$，得 $\lambda=2$. 即当 $\lambda=2$ 时，齐次线性方程组有非零解.

例 1.5.3 判定下列齐次线性方程组是否有非零解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

解 因为齐次线性方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0,$$

所以此方程组没有非零解.

例 1.5.4 给定平面上三个点 $(1,1)$，$(2,-1)$，$(3,1)$，求过这三个点且对称轴与 y 轴平行的抛物线方程.

解 设所求抛物线方程为 $y = c + bx + ax^2$，于是有

$$\begin{cases} 1 = c + b + a, \\ -1 = c + 2b + 4a, \\ 1 = c + 3b + 9a. \end{cases} \tag{1.5.4}$$

这个方程组的系数行列式是范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (3-2)(3-1)(2-1) = 2.$$

则线性方程组（1.5.4）有唯一解，又 $D_1 = 14$， $D_2 = -16$， $D_3 = 4$.

故 $c = 7$ ， $b = -8$ ， $a = 2$ ，即所求抛物线方程为 $y = 7 - 8x + 2x^2$.

克拉默法则给出的结论是很完美的，对 n 元线性方程组（1.5.1），当系数行列式不为零时，解决了方程组解的存在性与唯一性问题，并给出了用方程组的系数和常数项构成的行列式表示解的公式，这在理论上是有重大价值的.

在上述各例中，我们看到应用克拉默法则求解线性方程组时，要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，这个计算量是相当大的，所以，在具体求解线性方程组时，很少用克拉默法则．此外，当方程组中方程的个数与未知量的个数不相同时，就不能用克拉默法则求解．当方程组（1.5.1）的系数行列式 $D = 0$ 时，也不能用克拉默法则讨论方程组是否有解．在第三章我们将讨论求解一般线性方程组的有效方法——高斯（Gauss）消元法与判定方程组是否有解的一般方法.

习题 1

1．计算下列行列式

（1） $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$； （2） $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$； （3） $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$.

2．用二阶行列式解二元解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = -1. \end{cases}$$

3．用三阶行列式的定义计算

（1） $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$； （2） $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

4．利用二阶与三阶行列式的关系计算行列式

（1） $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$； （2） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； （3） $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

5．当 x 取何值时， $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

6．写出下面行列式中元素 a_{32} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7．用行列式的定义计算

（1）$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n & 0 \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

8．下列命题是否正确？若不正确，请给出正确答案．

（1）$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$.

9．已知 $D = \begin{vmatrix} 4 & 26 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ -2 & 31 & 1 \end{vmatrix} = -13$，利用行列式性质计算 $D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ 4 & 26 & 1 \end{vmatrix}$.

10．利用行列式性质计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 28 & -19 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 1 & 2 & -6 & 28 & -19 \\ 4 & -6 & 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

11．计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

12．计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$；（5）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

13．证明下列恒等式

（1）$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = 0$；

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ c^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ d^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \end{vmatrix} = 0$.

14．利用递推公式计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}.$$

（提示：从第一列起，每列减去后面一列，并按第一行展开，可得递推公式；从第一行起，每行减去后面一行，并按第一列展开，可得另一递推公式）.

15．计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

其中行列式中空白处的元素全为零.

16．用克拉默法则解下列方程组

（1）$\begin{cases} x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+4x_3=1, \\ 2x_1-x_2=2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_1-x_3+2x_4=9, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

17．已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+\lambda x_3=0. \end{cases}$$

当λ为何值时，此方程组有非零解？