第 2 章　谓词逻辑

在第 1 章的命题逻辑中，命题是最基本的单位，并将原子命题看做是不可再分的基本元素。两个命题之间没有任何的内在联系。显然，用这种简单的方法无法刻画世界上事物之间的复杂的逻辑关系，甚至无法表达一些简单而又常见的推理。例如，著名的苏格拉底三段论：

所有的人都是要死的。

苏格拉底是人。

苏格拉底是要死的。

在命题逻辑中就无法表示这种推理过程。

根据常识，可以知道上述论断是正确的，然而利用命题逻辑是无法推证的。因为，在命题逻辑中，上述推理可表示为 $P \wedge Q \Rightarrow R$，其中 P、Q、R 分别表示上述 3 个命题。然而，$P \wedge Q \to R$ 并不是永真式，所以借助命题演算的推理理论不能证明其为重言式。

为了克服命题逻辑的局限性，有必要对原子命题的结构作进一步的细分，划分出个体词、谓词和量词，研究它们的形式结构和逻辑关系、正确的推理形式和规则，这就是谓词逻辑的基本内容。

2.1　谓词的基本概念

命题是能够判断真假的陈述句。一般地说，陈述句是由主语和谓语两部分组成，它揭示了命题的内在结构和命题之间的关系。下面就从这两部分对原子命题进行分析。

2.1.1　个体和谓词

定义 2.1.1　在原子命题中，所陈述的对象称之为**个体**（Object），它是可以独立存在的具体事物或抽象的概念。用以刻画个体所具有的性质或个体之间关系的词称为**谓词**（Predicate）。

例如“小张是画家”主语是小张，谓语是“是画家”。“2 和 3 是自然数”由主语“2 和 3”和谓语“是自然数”组成。主语部分说明的是什么人或什么事，也就是陈述的对象，称之为个体。如“小张”、“2”、“3”都是个体。“…是画家”和“…和…是自然数”都是谓词。

例 2.1.1　（1）3 是质数。

（2）上课认真听讲是好习惯。

（3）李四比王五高。

（4）7 大于 6。

在上述语句中，“是质数”、“是好习惯”、“…比…高”、“…大于…”都是谓词，其中前两个谓词指明个体所具有的性质，后两个谓词刻画两个个体之间的关系。

下面约定用小写字母 a，b，…表示个体，大写字母 A，B，…表示谓词。例如用 a 表示 3，b 表示 5，A 表示“是质数”，则 $A(a)$ 与 $A(b)$ 用来表示“3 是质数”与“5 是质数”。若以 c 表示李四，d 表示王五，B 表示“…比…高”，则 $B(c,d)$ 用来表示“李四比王五高”。

定义 2.1.2 表示具体或特定个体的词称为**个体常元**，用小写字母 a、b、c 等表示。表示抽象或泛指个体的词称为**个体变元**，用 x、y、z 表示。

定义 2.1.3 表示具体性质或关系的谓词称为**谓词常元**，表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称为**谓词变元**。谓词常元或谓词变元都用大写字母 A、B 等表示。

例 2.1.2 （1）x 是大学生。

（2）2 和 4 具有关系 A。

在这个例子中，（1）和（2）都不是命题，因为 x 和 A 都是不确定的。

单独的一个谓词不是完整的命题，它不能表达完整的意思。只有按照谓词所刻画的性质或关系并填以具体的个体之后，才形成完整的语句，表达完整的意思。

定义 2.1.4 在谓词字母后填以个体所得的式子称为**谓词填式**。若 x_1，x_2，…，x_n 为个体变元，称 A（$x_1,x_2,\ldots,x_n$）为 n **元谓词**或 n **元命题函数**。

谓词和谓词填式的概念不同，但在不致产生歧义时，统称为谓词。

一元谓词表达了个体的性质，而 n 元谓词表达了 n 个个体之间的关系。

显然 n 元谓词不是命题，只有当个体变元用特定的个体替代时，才成为一个命题。不含变元的谓词即 0 元谓词是命题，因此命题是谓词的特殊情况。

一般说来，在多元谓词中代表个体的字母在式子中出现的次序不能随便更改。如例 2.1.1（3）中，$B(c,d)$ 与 $B(d,c)$ 分别代表两个不同的命题。另外，个体变元的论述范围对命题的真值也有影响。如用 $S(x)$ 表示 x 是大学生，当个体变元 x 的论述范围限定为某大学的全体学生时，$S(x)$ 真值为真；但当个体变元 x 的论述范围限定为某中学的全体学生时，$S(x)$ 真值为假。因此，在谓词逻辑中，需要指定个体的论述范围。

定义 2.1.5 个体的论述范围称为**个体域**或**论域**（Domain of Discourse）。个体域可以是有限的，也可以是无限的。把宇宙间一切事物组成的个体域称为**全总个体域**。

一般情况下，如果没有特别说明，个体的论述范围为全总个体域。当给定个体域后，个体常元为该个体域中的一个确定的元素，个体变元则可取该个体域中的任一元素。

例 2.1.3 将下列命题符号化：

（1）苏格拉底是人。

（2）平方为 –1 的数不是实数。

（3）小王爱好篮球或排球。

（4）张三与李四都是三好学生。

（5）如果你不出去，我就不进来。

解

（1）符号化为 $H(a)$，其中，$H(x)$：x 是人，a：苏格拉底。

（2）符号化为 $\neg R(a)$，其中，$R(x)$：x 是实数，a：平方为 –1 的数。

（3）符号化为 $B(a) \vee V(a)$，其中，$B(x)$：x 爱好篮球，$V(x)$：x 爱好排球，a：小王。

（4）符号化为 $S(a) \wedge S(b)$，其中，$S(x)$：x 是三好学生，a：张三，b：李四。

（5）符号化为 $\neg F(a) \rightarrow \neg G(b)$，其中，$F(x)$：$x$ 出去，$G(x)$：x 进来，a：你，b：我。

2.1.2　量词

利用上面讲的一些概念还不能用符号很好地表达日常生活中的各种命题。例如，$S(x)$：x 是大学生，而 x 的个体域为某单位的职工。那么 $S(x)$ 可以表示某单位职工都是大学生，也可以表示某单位存在一些职工是大学生。为了避免这种理解上的混乱，因此需要引入量词（Quantifier），用以刻画“所有的”和“存在一些”的不同概念。

定义 2.1.6　语句“一切的 x”、“所有的 x”、“每一个 x”、“任意的 x”等称为**全称量词**（The Universal Quantifier），记作 $\forall x$。$\forall x F(x)$ 表示个体域里的每一个个体都具有性质 F。

语句“存在一个 x”、“至少有一个 x”、“有一个 x”、“对某一个 x”等称为**存在量词**（The Existential Quantifier），记作 $\exists x$。$\exists x F(x)$ 表示个体域里至少存在一个个体具有性质 F。

全称量词和存在量词统称为**量词**。

可以用个体、谓词和量词将命题符号化，并且可以刻画命题的内在结构以及命题之间的关系。因此，引进个体、谓词和量词后，用形式符号表示命题的功能得到加强，表达意思更加全面、确切。

例 2.1.4　符号化下列命题：

（1）所有的人是要喝水的。

（2）任何实数或是正的或是负的。

（3）有些人是聪明的。

（4）有的人早饭吃面包。

解

（1）$\forall x(M(x)\to H(x))$，其中$M(x)$：x是人。$H(x)$：x要喝水的。

（2）$\forall x(I(x)\to(R(x)\vee N(x)))$，其中$I(x)$：$x$是实数。$R(x)$：$x$是正数。$N(x)$：$x$是负数。

（3）$\exists x(M(x)\wedge R(x))$，其中$M(x)$：$x$是人。$R(x)$：$x$是聪明的。

（4）$\exists x(M(x)\wedge E(x))$，其中$M(x)$：$x$是人。$E(x)$：$x$早饭吃面包。

上述句子中，都没有指明个体的取值范围，因而都指全总个体域。但当个体域为某一指定的范围时，命题的符号化表示形式将会有所不同。例如在例 2.1.4 的（1）中，将个体域指定为所有人的集合，则（1）的符号化形式为$\forall xH(x)$；在（2）中，将个体域指定为全体实数的集合，则（2）的符号化形式为$\forall x(R(x)\vee N(x))$。

定义 2.1.7 对个体变元变化范围进行限定的谓词称为**特性谓词**。

如例 2.1.4 中的$M(x)$、$I(x)$等都是特性谓词。在命题符号化时，一定要正确地使用特性谓词。

一般地，对全称量词、特性谓词常作蕴含的前件；对存在量词、特性谓词常作合取项。即“所有的…是…”应表示成$\forall x(A(x)\to B(x))$的形式，其中$A(x)$是特性谓词；“存在…是…”应表示成$\exists x(A(x)\wedge B(x))$的形式，其中$A(x)$是特性谓词。

在命题符号化过程中值得强调以下几点：

（1）在不同的个体域中，同一命题的符号化形式可能相同，也可能不同。

（2）同一命题，在不同的个体域中的真值可能会有所不同。

（3）$A(x)$不是命题，但在其前面加上量词后，$\forall xA(x)$与$\exists xA(x)$在给定的个体域内就有了确定的真值，也就变成了命题。

2.2 谓词公式与符号化解释

与命题逻辑一样，为了在谓词逻辑中进行演算和推理，需要对谓词的表达式进行形式化，即舍去命题的具体内容，只对其真值进行讨论。因此需要引进谓词公式的概念。

2.2.1 谓词公式

把$A(x_1,x_2,...,x_n)$称为谓词演算的原子公式，其中x_1，x_2，…，x_n是个体变元。因此原子谓词公式包括下述形式的各种特例，如Q、$A(x)$、$A(x,y)$、$A(f(x),y)$、$A(x,y,z)$、$A(a,y)$等。

需要指出的是，在谓词演算的原子公式中不能出现命题联结词和量词。

定义 2.2.1 谓词演算的**合式公式**定义如下：

（1）原子谓词公式是合式公式。

（2）若A是合式公式，则$\neg A$也是合式公式。

（3）若 A 和 B 是合式公式，则 $A \wedge B$ 、 $A \vee B$ 、 $A \rightarrow B$ 与 $A \leftrightarrow B$ 是合式公式。

（4）若 A 是合式公式， x 是 A 中出现的任何变元，则 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 都是合式公式。

（5）只有经过有限次地应用规则（1）、（2）、（3）、（4）所得到的公式是合式公式。

谓词演算的合式公式，简称为**谓词公式**（Predicate Formula）。

由定义可知，命题公式也是谓词公式，因此命题逻辑包含在谓词逻辑中。

谓词公式中的某些括号也可以省略，其规定与命题公式相同，但量词后若有括号则不能省略。

2.2.2 谓词公式的符号化

可以用个体、谓词和量词将命题符号化，并且可以刻画命题的内在结构以及命题之间的关系。

例 2.2.1 将下列命题符号化：

（1）并非每个实数都是有理数。

（2）发光的不都是金子。

（3）所有学生都钦佩某些老师。

（4）有些学生不钦佩老师。

解 （1）设 $R(x)$ ： x 是实数。$Q(x)$ ： x 是有理数。则有 $\neg\forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$ 或 $\exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$ 。

（2）设 $P(x)$ ： x 发光。 $G(x)$ ： x 是金子。则有 $\exists x(P(x) \wedge \neg G(x))$ 或 $\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow G(x))$ 。

（3）设 $S(x)$ ： x 是学生。$T(x)$ ： x 是老师。$A(x, y)$ ： x 钦佩 y 。则有 $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge A(x, y)))$ 。

（4）设 $S(x)$ ： x 是学生。 $T(x)$ ： x 是老师。 $A(x, y)$ ： x 钦佩 y 。则有 $\exists x(S(x) \wedge \forall y(T(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$ 。

例 2.2.2 将下列命题符号化：

（1）会叫的狗未必咬人。

（2）不是所有人都一样高。

（3）并不是所有的火车都比所有的汽车跑得快。

（4）今天有雨雪，有些人会摔倒。

解

（1）设 $D(x)$ ： x 是狗。 $B(x)$ ： x 会叫。 $C(x)$ ： x 咬人。则命题可表示为 $\neg\forall x(D(x) \wedge B(x) \rightarrow C(x))$ 或 $\exists x(D(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$ 。

（2）设 $H(x)$ ： x 是人。 $A(x, y)$ ： x 与 y 一样高。则命题可表示为 $\neg\forall x\forall y(H(x) \wedge H(y) \rightarrow A(x, y))$ 或 $\exists x\exists y(H(x) \wedge H(y) \wedge \neg A(x, y))$ 。

（3）设 $R(x)$： x 是火车。 $D(x)$： x 是汽车。 $A(x,y)$： x 比 y 跑得快。则命题可表示为 $\neg\forall x\forall y(R(x)\wedge D(y)\to A(x,y))$ 。

（4）设 R：今天有雨。 S：今天有雪。 $H(x)$： x 是人。 $D(x)$： x 会摔倒。则命题可表示为 $R\wedge S\to\exists x(H(x)\wedge D(x))$ 。

例 2.2.3 将苏格拉底三段论符号化表示。

所有的人都是要死的。苏格拉底是人。苏格拉底是要死的。

解 设 $H(x)$： x 是人。 $D(x)$： x 是要死的。 a：苏格拉底。

则命题可表示为： $\forall x(H(x)\to D(x))\wedge H(a)\to D(a)$ 。

例 2.2.4 设 $P(x)$： x 是兔子。$Q(x)$： x 是乌龟。$R(x,y)$： x 比 y 跑得快。将下列表达式译成汉语：

（1） $\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))$

（2） $\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\to R(x,y)))$

（3） $\neg\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))$

解 （1）译成汉语为：兔子比乌龟跑得快。

（2）译成汉语为：有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）译成汉语为：并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

2.3 变元的约束

2.3.1 约束变元和自由变元

定义 2.3.1 在一个谓词公式中，形如 $(\forall x)P(x)$ 或 $(\exists x)P(x)$ 的部分称为 x 的约束部分。$\forall$ 、$\exists$ 后面所跟的 x 称为量词的**指导变元**或**作用变元**。$P(x)$称为相应量词的**辖域**或**作用域**。在作用域中 x 的一切出现，称为**约束出现**，x 称为**约束变元**。若 x 的出现不是约束出现，则称为**自由出现**，x 称为**自由变元**。

自由变元是不受约束的变元，虽然它有时也在量词的作用域中出现，但它不受相应量词中指导变元的约束。

为了正确地理解谓词公式，必须准确地判断出量词的作用域以及哪些是自由变元，哪些是约束变元。

一般地，判断量词的作用域要看其后是否跟有括号，若有括号，则括号内的子公式为相应量词的作用域，否则与量词邻接的子公式为其作用域。

判断给定公式中的个体变元是约束变元还是自由变元，关键看它是自由出现还是约束出现。

例 2.3.1 指出下列公式的指导变元、作用域、约束变元和自由变元。

（1） $\forall x(P(x)\to\exists yR(x,y))$

（2） $\exists x(P(x,y)\to Q(x,z))\vee R(x)$

（3）$\forall x(P(x) \wedge \exists x Q(x,z) \to \exists y R(x,y)) \vee Q(x,y)$

解 （1）x 是指导变元，$\forall x$ 的作用域为 $P(x) \to \exists y R(x,y)$； y 也是指导变元，$\exists$ 的作用域为 $R(x,y)$。在该作用域 $R(x,y)$ 中，x 是自由出现，y 是约束出现。在 $\forall$ 的作用域 $P(x) \to \exists y R(x,y)$ 中，x、y 都是约束出现。

（2）x 是指导变元，相应量词 $\exists$ 的作用域为 $P(x,y) \to Q(x,z)$，从左向右算起，变量 x 的第一、二次出现是约束出现，x 的第三次出现是自由出现。变量 y、z 的出现都是自由出现。

（3）x、y 是指导变元，$\forall x$ 的作用域是 $P(x) \wedge \exists x Q(x,z) \to \exists y R(x,y)$，$\exists x$ 的作用域是 $Q(x,z)$，$\exists y$ 的作用域是 $R(x,y)$。x 的最后一次出现为自由出现，其余为约束出现，y 的第一次出现为约束出现，第二次出现为自由出现。变元 z 为自由出现。

定义 2.3.2 在任一谓词公式 A 中，若 A 中无自由出现的个体变元，则称 A 是**封闭的谓词公式**，简称为**闭式**。

例如 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 和 $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ 都是闭式，但 $\forall x P(x,y)$ 不是闭式。

从约束变元的概念可以看出，$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 n 元谓词公式，它有 n 个相互独立的自由变元，若对其中的 k 个变元进行约束，则公式变成了 $n-k$ 元谓词。因此，如果谓词公式中没有自由变元出现，则该谓词公式就成为一个命题。例如 $\forall x P(x,y)$ 是一元谓词，$\forall x P(x,y,z)$ 为二元谓词，而闭式则为命题。

在谓词公式中，一个个体变元可以既是自由变元，又是约束变元。为了避免一个变元既是自由变元又是约束变元，引起概念上的混乱，可以对自由变元或约束变元进行改名，使得一个变元在一个公式中只呈现一种形式，即呈自由出现或约束出现。

2.3.2 换名规则

在一个谓词公式中，约束变元所使用的名称符号是无关紧要的。因此，$\forall x P(x)$ 与 $\forall y P(y)$ 具有相同的意义。设 $A(x)$ 表示 x 小于 0，则 $\forall x A(x)$ 表示一切 x 都小于 0；$\forall y A(y)$ 表示一切 y 都小于 0；$\forall t A(t)$ 表示一切 t 都小于 0。

这 3 个命题在实数域中都表示假命题“一切实数均小于 0”。同理 $(\exists x)P(x)$ 与 $(\exists y)P(y)$ 表示的意义也相同。

因此，可以对谓词公式中的约束变元更改名称符号，这种更改需要遵循一定的规则，这种规则称为约束变元的**换名规则**。

换名规则：①对于约束变元可以换名，其更改的变元名称范围是量词中的指导变元，以及该量词作用域中所出现的该变元，公式的其余部分不变；②换名时一定要更改为作用域中没有出现的变元名称。

例 2.3.2 将 $\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge R(x,y)$ 中的约束变元进行换名。

解 可换名为$\forall z(P(z)\to Q(z,y))\wedge R(x,y)$，但不能换名为

$$\forall y(P(y)\to Q(y,y))\wedge R(x,y)$$

或

$$\forall z(P(z)\to Q(x,y))\wedge R(x,y)$$

因为后两种更改都将使公式中的量词的约束范围有所变动。

例 2.3.3 将$\forall x(P(x)\wedge \exists xQ(x,z)\to \exists yR(x,y))\vee Q(x,y)$中的约束变元进行换名。

解 可换名为$\forall u(P(u)\wedge \exists vQ(v,z)\to \exists wR(u,w))\vee Q(x,y)$，但不能换名为

$$\forall z(P(z)\wedge \exists xQ(x,z)\to \exists yR(z,y))\vee Q(x,y)$$

或

$$\forall x(P(x)\wedge \exists zQ(z,z)\to \exists yR(x,y))\vee Q(x,y)$$

因为后两种更改都将使公式中的量词的约束范围有所变动。

2.3.3 代替规则

在谓词公式中，自由变元虽然可以出现在量词的作用域中，但它不受相应量词中指导变元的约束，因而可把自由变元看作公式的参数。

对于公式中的自由变元，也允许更改，这种更改叫做代替。自由变元的代入也需要遵守一定的规则，这个规则称为自由变元的**代替规则**。

代替规则：①对于谓词公式中的自由变元，可以作代替，代替时需要对公式中出现该自由变元的每一处进行；②用以代替的变元与原公式中所有变元的名称不能相同。

例 2.3.4 将公式$(\exists x)(P(y)\wedge R(x,y))$中的自由变元进行代替。

解 y为自由变元，代替后公式为$(\exists x)(P(z)\wedge R(x,z))$，但是$(\exists x)(P(x)\wedge R(x,x))$与$(\exists x)(P(z)\wedge R(x,y))$这两种代替都与规则不符。

例 2.3.5 将公式$\forall x(P(x)\to Q(x,y))\wedge R(x,y)$中的自由变元进行代替。

解 对自由变元x进行代替后公式为$\forall x(P(x)\to Q(x,y))\wedge R(z,y)$。

公式中y也是自由变元，但是变元y只以一种身份出现，因此，可以不对y进行代替。

2.4 谓词演算的等价式与蕴含式

2.4.1 谓词公式的赋值

命题公式的值，通过对公式中的命题变元进行真值指派就可以确定，当然，取什么值要由命题公式自身的形式结构决定。要确定谓词公式的真值就不是那么容易了，因为在谓词公式中，除了要指定个体域外，还要对命题变元、个体变元和谓词变元等赋以确定的值，要知道个体变元的取值范围的不同对真值也是有影

响的。当命题变元用确定的命题所取代，个体变元用确定的个体所取代，谓词变元用确定的谓词所取代时，就称为对谓词公式的赋值。一个谓词公式经过赋值以后，就成为具有唯一确定真值的命题。

下面给出谓词公式的一个赋值的概念。

定义 2.4.1 设 G 是一个谓词公式，个体域为 E，G 的个体变元符号、命题变元符号、函数符号、谓词符号按下列规则进行的一组指派称为 G 的一个**赋值**或**解释**。

（1）每一个个体变元符号指定 E 的一个元素。

（2）每一个命题变元符号指定一个确定的命题。

（3）每一 n 元函数符号指定一个函数。

（4）每一 n 元谓词符号指定一个谓词。

例 2.4.1 设给出以下两个公式：

（1）$G=\forall y(P(y)\wedge Q(y,a))$

（2）$H=\exists x(P(f(x))\wedge Q(x,f(a)))$

给出如下解释 I ：$E=\{2，3\}$

a	$f(2)$	$f(3)$	$P(2)$	$P(3)$	$Q(2,2)$	$Q(2,3)$	$Q(3,2)$	$Q(3,3)$
3	3	2	1	0	1	0	0	1

则 $G=P(2)\wedge Q(2,3)\wedge P(3)\wedge Q(3,3)=1\wedge 0\wedge 0\wedge 1=0$

$$H=(P(f(2))\wedge Q(2,f(3))\vee P(f(3))\wedge Q(3,f(3))$$
$$=(P(3)\wedge Q(2,2)\vee(P(2)\wedge Q(3,2))=(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)=0$$

即（1）、（2）在解释 I 下的值均为 0。

例 2.4.2 设 $G=\forall x\exists yP(x,y)$ ，给出如下解释 I ：$E=\{1，2，3\}$

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(1,3)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$	$P(2,3)$	$P(3,1)$	$P(3,2)$	$P(3,3)$
1	0	0	1	1	1	1	0	1

则 $G=(P(1,1)\vee P(1,2)\vee P(1,3))\wedge(P(2,1)\vee P(2,2)\vee P(2,3))\wedge(P(3,1)\vee P(3,2)\vee P(3,3))=(1\vee 0\vee 0)\wedge(1\vee 1\vee 1)\wedge(1\vee 0\vee 1)=1$

即 G 在 I 下的值为 1。

2.4.2 谓词公式的分类

与命题逻辑一样，谓词逻辑也存在着永真公式。

定义 2.4.2 给定谓词公式 A ，其个体域为 E ，对于 A 的所有赋值，其结果都为 T ，则称谓词公式 A 在个体域 E 上是**有效的**（或**永真的**）；若对于 A 的所有赋值，其结果都为 F ，则称谓词公式 A 在个体域 E 上是**不可满足的**（或**矛盾的**）；若对于 A 的所有赋值，如果至少在一种赋值下其结果为 T ，则称谓词公式 A 在个体域 E 上是**可满足的**。

显然，永真公式一定是可满足的。由永真的定义知，要判断一个公式是否永真，

需要写出所有的解释，当论域为无限集时，就不可能把所有的解释都写出来，另外，谓词逻辑没有像命题逻辑那样的真值表。因此，谓词逻辑的公式永真的判定问题就变得十分复杂。直到20世纪才知道这个问题是不可解的，令人十分遗憾。

目前还没有判断谓词公式类型的一种统一可行的方法，只能对一些特殊的谓词公式进行判断。

对于一些特殊的谓词公式，如果它是永真式或矛盾式，则可以采用分析法或等值演算法进行证明；如果它是非永真的可满足式，则要通过举例说明，即给出两种解释，一种解释使其为真，另一种解释使其为假。

定义 2.4.3 A_0 是含有 n 个命题变元 p_1，p_2，…，p_n 的命题公式，A_1，A_2，…，A_n 是 n 个谓词公式，用 A_i 处处代换 p_i，所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**。

显然有如下结论。

定理 2.4.1 （1）命题公式中永真式的代换实例在谓词公式中仍为永真式。

（2）命题公式中矛盾式的代换实例在谓词公式中仍为矛盾式。

例 2.4.3 判断下列公式的类型：

（1）$\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

（2）$\forall xF(x) \to (\forall x\exists yG(x,y) \to \forall xF(x))$

（3）$\neg(F(x,y) \to R(x,y)) \wedge R(x,y)$

（4）$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y)$

解 （1）设 I 为任意解释。如果 $\forall xF(x)$ 在 I 下为真，则对于任意一个个体 a 都有 $F(a)$ 为真，于是 $\exists xF(x)$ 为真；如果 $\forall xF(x)$ 在 I 下为假，由条件的前件为假可知 $\forall xF(x) \to \exists xF(x)$ 为真。故 $\forall xF(x) \to \exists xF(x)$ 为永真式。

（2）因为 $P \to (Q \to P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee \neg Q \Leftrightarrow T$，而 $\forall xF(x) \to (\forall x\exists yG(x,y) \to \forall xF(x))$ 是 $P \to (Q \to P)$ 的代换实例，所以 $\forall xF(x) \to (\forall x\exists y G(x,y) \to \forall xF(x))$ 为永真式。

（3）因为 $\neg(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge Q \Leftrightarrow F$，而 $\neg(F(x,y) \to R(x,y)) \wedge R(x,y)$ 是 $\neg(P \to Q) \wedge Q$ 的代换实例，所以 $\neg(F(x,y) \to R(x,y)) \wedge R(x,y)$ 为永假式。

（4）取解释 I_1 为：个体域为自然数集 N；$F(x,y)$：$x = y$。则：$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y(x = y) \to \exists x\forall y(x = y) \Leftrightarrow F$。

取解释 I_2 为：个体域为自然数集 N；$F(x,y)$：$x \leqslant y$。则 $\forall x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y(x \leqslant y) \to \exists x\forall y(x \leqslant y) \Leftrightarrow T$。

综上，$\forall x\exists yF(x,y) \to \exists x\forall yF(x,y)$ 为可满足式。

2.4.3 谓词演算的等价式

定义 2.4.4 给定任何两个谓词公式 A 和 B，设它们有共同的个体域 E，若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值，所得命题的真值都相同，则称谓词公式 A 和 B 在个

体域 E 上是**等价**的，并记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

由定义知，两个谓词公式 A 和 B 等价当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。谓词公式的等价具有自反性、对称性和传递性。

由于命题可看成是 0 元谓词，命题逻辑可视为谓词逻辑的特例。因此，命题逻辑中给出的基本等价式在谓词逻辑中依然成立。例如

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\neg(\neg(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists y)R(x,y)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \exists yR(x,y)$$

$$\exists xP(x,y) \wedge \neg(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow F$$

另外，还有很多谓词逻辑本身特有的等价式，下面给出一些常见的基本谓词公式等价式。

1. 量词的消去

量词作用域中的约束变元，当论域的元素是有限时，个体变元的所有可能的取代是可以枚举的。

设论域元素为 a_1，a_2，…，a_n ，则有下列式子成立：

（1）$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

（2）$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

例 2.4.4 设个体域为$\{a，b，c\}$，试消去表达式$\forall x\neg P(x) \wedge \forall xQ(x)$中的量词，写成与之等价的命题公式。

解 $\forall x\neg P(x)$ 消去量词后的等价的命题公式为：

$$\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c) \Leftrightarrow \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(b))$$

$\forall xQ(x)$ 消去量词后的等价的命题公式为：

$$Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c)$$

于是，$\forall x\neg P(x) \wedge \forall xQ(x)$ 消去量词后的等价的命题公式为：

$$\neg(P(a) \vee P(b) \vee P(b)) \wedge (Q(a) \wedge Q(b) \wedge Q(c))$$

例 2.4.5 求下列各式的真值：

（1）$\forall y(P(y) \vee Q(y))$，其中 $P(y)$： $y=1$， $Q(y)$： $y=2$，个体域为$\{1，2\}$。

（2）$\forall x(P \to Q(x)) \vee R(a)$，其中 P ： $2>-1$， $Q(x)$： $x \leqslant 3$， $R(x)$： $x>5$，a：3，个体域为$\{-2，3，5，6\}$。

（3）$\exists x(P(x) \to Q(x)) \wedge T$，其中 $P(x)$： $x>1$， $Q(x)$： $x=1$， T 为任意的永真式，个体域为$\{1\}$。

（4）$\forall x\exists yP(x,y)$，其中 $P(x,y)$： $x+y=4$，个体域为$\{1，2\}$。

解 （1）$\forall y(P(y) \vee Q(y)) \Leftrightarrow (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2))$

$$\Leftrightarrow (T \vee F) \wedge (F \vee T) \Leftrightarrow T$$

（2）$\forall x(P \to Q(x)) \vee R(a)$

$\Leftrightarrow ((P \to Q(-2)) \wedge (P \to Q(3)) \wedge (P \to Q(5)) \wedge (P \to Q(6))) \vee R(a)$

$\Leftrightarrow (T \wedge T \wedge F \wedge F) \vee F \Leftrightarrow F$

（3）$\exists x(P(x)\to Q(x))\wedge T \Leftrightarrow \exists x(P(x)\to Q(x))$

$$\Leftrightarrow P(1)\to Q(1)\Leftrightarrow F\to T\Leftrightarrow T$$

（4）$\forall x\exists yP(x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y(x+y=4)$

$$\Leftrightarrow \forall x((x+1=4)\vee(x+2=4))$$

$$\Leftrightarrow ((1+1=4)\vee(1+2=4))\wedge((2+1=4)\vee(2+2=4))$$

$$\Leftrightarrow F$$

2. 量词与“$\neg$”之间的关系

$$\neg(\forall x)P(x)\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x)\Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$$

例如设$P(x)$：x今天上班。个体域为某公司全体员工，则有

$\neg(\forall x)P(x)$：并不是全体员工今天都上班。

$\exists x\neg P(x)$：有一些员工今天不上班。

显然有$\neg(\forall x)P(x)\Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$。

又如$\neg(\exists x)P(x)$：不存在员工今天上班。

$\forall x\neg P(x)$：所有的员工今天都不上班。

因此$\neg(\exists x)P(x)\Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$。

这两个等价式的意义在于：否定可以通过量词深入到作用域且两个量词可以相互表达。

需要指出的是，出现在量词之前的否定，不是否定该量词，而是否定被量化了的整个命题。

对于多重量词前置“$\neg$”，可以反复应用上面的结果，逐次右移$\neg$。例如：

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(\forall y)(\forall z)P(x,y,z) &\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\forall y)(\forall z)P(x,y,z)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\neg(\forall z)P(x,y,z)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)\neg P(x,y,z)\end{aligned}$$

对于量词的转化律，可以在有限个个体域上证明。

设个体域为$\{a_1，a_2，\ldots，a_n\}$，则

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)P(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))\\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg(\exists x)P(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_n))\\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1)\wedge\neg P(a_2)\wedge\ldots\wedge\neg P(a_n)\\ &\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)\end{aligned}$$

对于无穷个体域的情况，量词转化律也可以作相应的推广。

通过上述的两个公式可以看到，当将量词前面的“$\neg$”移到量词的后面去时，存在量词改为全称量词，全称量词改为存在量词。反之，若将量词后面的“$\neg$”移到量词的前面去时，存在量词和全称量词同样要做相应的变换。这种量词与“$\neg$”

之间的关系是普遍成立的。

3. 量词作用域的扩张与收缩

量词作用域中，如果其中一个为命题，则可将该命题移至量词作用域之外。

（1）$\forall x(P(x)\vee Q)\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee Q$

（2）$\forall x(P(x)\wedge Q)\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge Q$

（3）$\exists x(P(x)\wedge Q)\Leftrightarrow\exists xP(x)\wedge Q$

（4）$\exists x(P(x)\vee Q)\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee Q$

（5）$(Q\rightarrow\forall xP(x))\Leftrightarrow\forall x(Q\rightarrow P(x))$

（6）$(Q\rightarrow\exists xP(x))\Leftrightarrow\exists x(Q\rightarrow P(x))$

（7）$(\exists xP(x)\rightarrow Q)\Leftrightarrow\forall x(P(x)\rightarrow Q)$

（8）$(\forall xP(x)\rightarrow Q)\Leftrightarrow\exists x(P(x)\rightarrow Q)$

上述公式中的Q不含有约束变元x。

证明　（1）设I是$P(x)$和Q的一个解释，个体域为E。若$\forall x(P(x)\vee Q)$在I下的值为1，则对任意的$x\in E$，$P(x)\vee Q$为真命题，即$P(x)\vee Q$的值为1。若Q的值为1，则$\forall xP(x)\vee Q$的值为1；若Q的值为0，则$P(x)$为1，这时，$\forall xP(x)\vee Q$的值仍为1。即不论Q的值是否为1，总有$\forall xP(x)\vee Q$的值为1。

若$\forall x(P(x)\vee Q)$在I下的值为0，即$P(x)$及Q的值均为0，则$\forall xP(x)\vee Q$的值为0。

（2）、（3）、（4）的证明与（1）类似。

（5）
$$\begin{aligned}(Q\rightarrow\forall xP(x))&\Leftrightarrow\neg Q\vee\forall xP(x)\\&\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee\neg Q\\&\Leftrightarrow\forall x(P(x)\vee\neg Q)\\&\Leftrightarrow\forall x(Q\rightarrow P(x))\end{aligned}$$

（6）
$$\begin{aligned}(Q\rightarrow\exists xP(x))&\Leftrightarrow\neg Q\vee\exists xP(x)\\&\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\neg Q\\&\Leftrightarrow\exists x(P(x)\vee\neg Q)\\&\Leftrightarrow\exists x(Q\rightarrow P(x))\end{aligned}$$

（7）
$$\begin{aligned}(\exists xP(x)\rightarrow Q)&\Leftrightarrow\neg\exists xP(x)\vee Q\\&\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)\vee Q\\&\Leftrightarrow\forall x(\neg P(x)\vee Q)\\&\Leftrightarrow\forall x(P(x)\rightarrow Q)\end{aligned}$$

（8）
$$\begin{aligned}(\forall xP(x)\rightarrow Q)&\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\vee Q\\&\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\vee Q\\&\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee Q)\\&\Leftrightarrow\exists x(P(x)\rightarrow Q)\end{aligned}$$

当谓词的变元与量词的指导变元不同时，亦有类似于上述的公式。例如

$$\forall x(P(x) \vee Q(y)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee Q(y)$$
$$\forall x(\forall yP(x,y) \wedge Q(z)) \Leftrightarrow \forall x\forall yP(x,y) \wedge Q(z)$$

4. 量词与命题联结词之间的一些等价式

（1）$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

（2）$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$

（3）$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Leftrightarrow \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))$

（4）$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$

（5）$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$

证明　（1）设论域为E，I是任意一个解释。若I满足$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$，则$\forall x \in E$，$P(x)$，$Q(x)$的值为 1，于是$\forall x \in E$，$P(x) \wedge Q(x)$的值为 1，$I$满足$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$。若$I$弄假，则$I$弄假$\forall xP(x)$或$\forall xQ(x)$。于是存在$a \in E$使$P(a)$的真值为 0，或存在$b \in E$使$Q(b)$的真值为 0，这样，$P(a) \wedge Q(a)$或$P(b) \wedge Q(b)$为 0，$I$弄假$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$。

（2）、（3）可类似的证明。

（4）$\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists yQ(y) \Leftrightarrow \exists x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$

（5）
$$\begin{aligned}\exists x(P(x) \to Q(x)) &\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))\\ &\Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists xQ(x)\\ &\Leftrightarrow \neg(\forall xP(x)) \vee \exists xQ(x)\\ &\Leftrightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)\end{aligned}$$

对于公式（1）可解释如下：$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$表示晚会上所有的人既唱歌又跳舞，而$\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$表示晚会上所有的人唱歌且所有的人跳舞。这两个语句的意义显然相同。

2.4.4　谓词演算的蕴含式

量词与命题联结词之间存在一些不同的结合情况，有些是蕴含式。下列蕴含式成立：

（1）$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$

（2）$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

（3）$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$

（4）$\exists xP(x) \to \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$

（5）$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$

证明　（1）设在解释I下$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$的值为 1，于是，$\forall xP(x)$为真命题或$\forall xQ(x)$为真命题。设个体域为$E$，则对于任意的$x \in E$，$P(x)$的值为 1 或$Q(x)$的值为 1，于是，$P(x) \vee Q(x)$的值总为 1，即$I$满足$\forall x(P(x) \vee Q(x))$。

（2）设解释I满足$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$，个体域为$E$，于是存在$a \in E$使得$P(a) \wedge Q(a)$的值为 1，即$P(a)$，$Q(a)$的值为 1。因此，$\exists xP(x)$与$\exists xQ(x)$均为真命

题，I 满足 $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$。

（3）要证明 $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$，即证 $(\forall x(P(x)\to Q(x)))\to(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))$ 为永真式。利用分析法，假设后件为假，推出前件为假。

设 $\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ 为假命题，则 $\forall xP(x)$ 为真，$\forall xQ(x)$ 为假。故必有 $a\in E$ 使 $P(a)$ 为真，$Q(a)$ 为假。于是 $P(a)\to Q(a)$ 为假。所以 $\forall x(P(x)\to Q(x))$ 为假，即 $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$ 成立。

（4）
$$\begin{aligned}\exists xP(x)\to\forall xQ(x)&\Leftrightarrow\neg(\exists x)P(x)\vee\forall xQ(x)\\&\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)\vee\forall xQ(x)\\&\Rightarrow\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\\&\Leftrightarrow\forall x(P(x)\to Q(x))\end{aligned}$$

（5）
$$\begin{aligned}\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))&\Leftrightarrow\forall x((P(x)\to Q(x))\wedge(Q(x)\to P(x)))\\&\Leftrightarrow\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall x(Q(x)\to P(x))\\&\Rightarrow(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\wedge(\forall xQ(x)\to\forall xP(x))\\&\Leftrightarrow\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)\end{aligned}$$

对于多个量词的公式，有时候可以交换量词的顺序，但大多数情况下是不能随意交换的。比如，两个量词的公式有下列 8 种情况：

$\forall x\forall yP(x,y)$　$\forall x\exists yP(x,y)$　$\exists x\forall yP(x,y)$　$\exists x\exists yP(x,y)$

$\forall y\forall xP(x,y)$　$\forall y\exists xP(x,y)$　$\exists y\forall xP(x,y)$　$\exists y\exists xP(x,y)$

两个量词的排列次序有以下结论：

（1）$\forall x\forall yP(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xP(x,y)$

（2）$\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\exists y\forall xP(x,y)$

（3）$\forall y\forall xP(x,y)\Rightarrow\exists x\forall yP(x,y)$

（4）$\exists y\forall xP(x,y)\Rightarrow\forall x\exists yP(x,y)$

（5）$\exists x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xP(x,y)$

（6）$\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xP(x,y)$

（7）$\forall y\exists xP(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yP(x,y)$

（8）$\exists x\exists yP(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xP(x,y)$

需要说明的是，上述蕴含式的逆不一定成立。下面对（6）进行说明。

例如，设 $P(x,y)$ 表示 x 与 y 同姓，x 的论域是甲村的人，y 的论域是乙村的人，则 $\forall x\exists yP(x,y)$ 表示对于甲村的所有人，乙村都有人与他同姓。$\exists y\exists xP(x,y)$ 表示乙村与甲村有人同姓。显然，$\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow\exists y\exists xP(x,y)$ 成立，而其逆不成立。

例 2.4.6　下列蕴含式是否成立，为什么？

（1）$\forall xP(x)\to\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\to Q(x))$

（2）$\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\to\forall xQ(x)$

解　（1）设个体域为{1，2}，令 $P(x)$：x=1，$Q(x)$：x=2，则

$$\forall xP(x)\to\forall xQ(x)\Leftrightarrow(P(1)\wedge P(2))\to(Q(1)\wedge Q(2))\Leftrightarrow T$$

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\to Q(1))\wedge(P(2)\to Q(2))\Leftrightarrow F$$

所以，（1）式不成立。

（2）设个体域为{1，2}，令 $P(x)$： $x=2$， $Q(x)$： $x=2$，则

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow(P(1)\to Q(1))\wedge(P(2)\to Q(2))\Leftrightarrow T$$

$$\exists xP(x)\to\forall xQ(x)\Leftrightarrow(P(1)\vee P(2))\to(Q(1)\wedge Q(2))\Leftrightarrow F$$

所以，（2）式不成立。

2.5* 谓词公式范式

同命题逻辑一样，谓词逻辑中也有必要研究谓词公式的标准形式问题。本节主要介绍前束范式和斯柯林范式。

2.5.1 前束范式

在命题逻辑中，析取范式和合取范式是公式的两种不同的等价形式。实际上，范式是解决了公式的标准表示形式的问题。在谓词逻辑中同样有范式的概念，并且范式还不止一种。本节只介绍一种范式——前束范式。

定义 2.5.1 一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末端，则该公式叫做**前束范式**（Prenex Normal Form）。

前束范式可记为下述形式：$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)A$，其中 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$， x_i 为个体变元， A 是没有量词的谓词公式。

例如， $\forall x\forall y\exists z(Q(x,y)\to P(z))$， $\forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee Q(y))$ 等都是前束范式，而 $\exists xA(x)\to\forall xB(x)$、 $\forall x\forall y((P(x)\to Q(y))\wedge\exists zR(x,y,z))$ 等都不是前束范式。

定义 2.5.2 设 P 是具有形式 $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)A$ 的前束范式，若 A 是合取范式，则称 P 为**前束合取范式**；若 A 是析取范式，则称 P 为**前束析取范式**。

利用换名规则、代替规则、量词的否定公式及量词辖域的扩张与收缩公式等，可以将任一谓词公式化成前束范式。

定理 2.5.1 任何一个谓词公式，均和一个前束范式等价。

证明 首先利用量词转化公式，把否定深入到命题变元和谓词填式的前面，其次，利用 $\forall x(A\vee B(x))\Leftrightarrow A\vee\forall xB(x)$ 和 $\exists x(A\wedge B(x))\Leftrightarrow A\wedge\exists xB(x)$ 把量词移到全式的最前面，这样便得到前束范式。

求一个谓词公式的前束范式的过程为

（1）通过利用公式 $P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$ 及 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$ 消去谓词公式中的联结词 $\to$ 和 $\leftrightarrow$。

（2）消去 $\neg$。

（3）否定深入，即利用量词转化公式把否定联结词深入到命题变元和谓词填式的前面。

（4）运用换名规则和代替规则，将公式中所有变元均用不同的符号。

（5）量词前移，即利用量词辖域的扩张把量词移到前面。

例 2.5.1 求下列公式的前束范式：

（1）$\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)$

（2）$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u))$

（3）$\forall x(\forall yP(x)\vee\forall zQ(z,y)\to\neg(\forall yR(x,y)))$

解 （1）$\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\neg\exists yQ(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall y\neg Q(y)$ （否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge\forall y\neg Q(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(P(x)\wedge\neg Q(y))$ （量词前移）

或者 $\forall xP(x)\wedge\neg\exists xQ(x)\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall x\neg Q(x)$ （否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge\neg Q(x))$

从（1）可以看出一个公式的前束范式不是唯一的。

（2）$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg(\exists z(P(x,z)\wedge P(y,z)))\vee\exists uQ(x,y,u))$ （消去$\to$）

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\forall z\neg(P(x,z)\wedge P(y,z)))\vee\exists uQ(x,y,u))$ （否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\forall z(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z))\vee\exists uQ(x,y,u))$ （否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee\exists uQ(x,y,u))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$ （量词前移）

（3）$\forall x(\forall yP(x)\vee\forall zQ(z,y)\to\neg(\forall yR(x,y)))$

$\Leftrightarrow\forall x(P(x)\vee\forall zQ(z,y)\to\neg(\forall yR(x,y)))$ （去掉多余的量词$\forall y$）

$\Leftrightarrow\forall x(\neg(P(x)\vee\forall zQ(z,y))\vee\exists y\neg R(x,y))$ （消去$\to$和否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x((\neg P(x)\wedge\neg\forall zQ(z,y))\vee\exists y\neg R(x,y))$ （否定深入）

$\Leftrightarrow\forall x((\neg P(x)\wedge\exists z\neg Q(z,y))\vee\exists u\neg R(x,u))$ （否定深入和换名规则）

$\Leftrightarrow\forall x(\exists z(\neg P(x)\wedge\neg Q(z,y))\vee\exists u\neg R(x,u))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists z\exists u((\neg P(x)\wedge\neg Q(z,y))\vee\neg R(x,u))$ （量词前移）

2.5.2 斯柯林范式

前束范式的优点是全部量词集中在公式的前面，其缺点是各个量词的排列没有一定的规则，这样当把一个公式化为前束范式时，其表达形式会出现多种形式，不便应用。1920 年，斯柯林（Skolem）提出对前束范式中量词出现的次序予以规定：**每个存在量词均在全称量词之前。**按此规定得到的范式形式，称为**斯柯林范式。**显然任何公式均可化为斯柯林范式。它的优点是：全公式按顺序可分三部分，即公式的所有存在量词、所有全称量词和辖域。这给谓词逻辑的研究提供了一定的方便。

例 2.5.2 求公式 $(\forall x)((\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y,z))\rightarrow\neg(\forall z)R(y,z))$ 的斯柯林范式。

解 $(\forall x)((\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y,z))\rightarrow\neg(\forall z)R(y,z))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg(\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y,z))\vee\neg(\forall z)R(y,z))$ （消去 $\rightarrow$ ）

$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x)\wedge(\exists y)\neg Q(y,z))\vee(\exists z)\neg R(y,z))$ （否定内移）

$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x)\wedge(\exists u)\neg Q(u,z))\vee(\exists v)\neg R(y,v))$ （换名规则）

$\Leftrightarrow\exists u\exists v(\forall x)((P(x)\wedge\neg Q(u,z))\vee\neg R(y,v))$ （量词前移）

2.6* 谓词演算的推理理论

谓词演算的推理方法，可以看作是命题演算推理方法的扩张。因为谓词演算的很多等价式和蕴含式是命题演算有关公式的推广，所以命题演算中的推理规则，如 P 规则、T 规则和 CP 规则等也可以在谓词的推理理论中应用。但是在谓词推理中，某些前提和结论可能是受量词的约束，为了确立前提和结论之间的内部联系，使用这些等价式和蕴含式时，有必要消去量词或添加量词，因此在推理过程中需要有相关的消去或添加量词的规则，以便使谓词演算的推理过程可类似于命题演算中的推理理论那样进行。

2.6.1 *US* 规则（Universal Specification，全称指定规则）

$$\forall xP(x)\Rightarrow P(c)$$

这个规则要求：

（1） x 在 $P(x)$ 中自由出现。

（2） c 是个体域中任意一个确定的个体。

这个规则是说，如果个体域中的所有元素都具有性质 P ，则个体域中任一确定的元素也都具有性质 P 。

例如，设个体域为全人类。$P(x)$ 表示“ x 是要死的”，如果有 $\forall xP(x)$ 表示“所有的人总是要死的”，那么全称指定规则可有结论“苏格拉底总是要死的”。

2.6.2 *UG* 规则（Universal Generalization，全称推广规则）

$$P(x)\Rightarrow\forall yP(y)$$

这个规则是说，如果能够证明对个体域中每一个个体都具有性质 P ，则个体域中的全体个体都具有性质 P 。在应用本规则时，必须能够证明 $P(x)$ 对个体域中每个 x 都为真。

2.6.3 *ES* 规则（Existential Specification，存在指定规则）

$$\exists xP(x)\Rightarrow P(c)$$

此处 c 是个体域中某个确定的个体，而不是任意的。这个规则是说，如果个体

域中存在具有性质 P 的个体，则个体域中必有某一元素 c 具有性质 P 。

例如，$\exists xP(x)$ 和 $\exists xQ(x)$ 都为真，则对于个体域中的某些个体 c 和 d ，可以断定 $P(c)\wedge Q(d)$ 必定为真，但不能断定 $P(c)\wedge Q(c)$ 为真。

2.6.4 *EG* 规则（Existential Generalization，存在推广规则）

$$P(c)\Rightarrow \exists yP(y)$$

这个规则是说，如果个体域中有某个个体具有性质 P ，则可以说个体域中存在具有性质 P 的个体。即若 $P(c)$ 为真，则 $\exists yP(y)$ 为真。

例如，设个体域为某班全体学生。$P(c)$ 表示“王明通过了英语六级”，由存在推广规则可有结论“该班有人通过了英语六级”。

有了 US 、 UG 、 ES 、 EG 4 个规则，再加上命题逻辑的推理规则，就可以进行谓词演算中的一些推理。

谓词演算中推理的一般过程是：利用 US 或 ES 规则，把前提条件中的量词消掉，变为命题逻辑的推理，推出结果后，再利用 UG 或 EG 规则把量词添加上去，得出谓词逻辑的结论。为了避免出现错误，需要注意以下三点：

（1）US 、 UG 、 ES 、 EG 这 4 个规则仅对谓词公式的前束范式适用。

（2）要弄清消去量词后，个体 c 是特定的还是任意的。

（3）如果既有全称量词的前提也有存在量词的前提，必须先指定存在量词的前提，后指定全称量词的前提。

例 2.6.1 证明苏格拉底三段论。

证明 设 $H(x)$ ： x 是人。$D(x)$ ： x 是要死的。a ：苏格拉底。

则命题可表示为：$\forall x(H(x)\to D(x))\wedge H(a)\to D(a)$ 。

（1）$\forall x(H(x)\to D(x))$　　P

（2）$H(a)\to D(a)$　　$US(1)$

（3）$H(a)$　　P

（4）$D(a)$　　$T(2)(3)\ I$

例 2.6.2 证明 $\forall x(C(x)\to W(x)\wedge R(x))\wedge \exists x(C(x)\wedge Q(x))\Rightarrow \exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证明

（1）$\exists x(C(x)\wedge Q(x))$　　P

（2）$C(a)\wedge Q(a)$　　$ES(1)$

（3）$\forall x(C(x)\to W(x)\wedge R(x))$　　P

（4）$C(a)\to W(a)\wedge R(a)$　　$US(3)$

（5）$C(a)$　　$T(2)\ I$

（6）$W(a)\wedge R(a)$　　$T(4)(5)\ I$

（7）$Q(a)$　　$T(2)\ I$

（8）$R(a)$　　$T(6)\ I$

（9）$Q(a) \wedge R(a)$　　$T(7)(8)\ I$

（10）$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$　　$EG(9)$

注意在本例的推导过程中，（2）和（4）两条的次序不能颠倒。如果先用 US 规则得到$C(a) \to W(a) \wedge R(a)$，再用$ES$规则时，不一定得到$C(a) \wedge Q(a)$，一般地应为$C(b) \wedge Q(b)$，因此无法推证下去。这也正说明了上述注意（3）中的内容：如果既有全称量词的前提也有存在量词的前提，必须先指定存在量词的前提，后指定全称量词的前提。

例 2.6.3　证明$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \exists xQ(x)$

证明

（1）$\forall xP(x)$　　附加前提

（2）$P(c)$　　$US(1)$

（3）$\forall x(P(x) \to Q(x))$　　P

（4）$P(c) \to Q(c)$　　$US(3)$

（5）$Q(c)$　　$T(2)(4)\ I$

（6）$\exists xQ(x)$　　$EG(5)$

（7）$\forall xP(x) \to \exists xQ(x)$　　CP

例 2.6.4　证明$\forall x(P(x) \vee Q(x))$，$\neg(\exists x)P(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$

证明

（1）$\neg(\exists x)P(x)$　　P

（2）$(\forall x)\neg P(x)$　　$T(1)\ E$

（3）$\neg P(a)$　　$US(2)$

（4）$\forall x(P(x) \vee Q(x))$　　P

（5）$P(a) \vee Q(a)$　　$US(4)$

（6）$Q(a)$　　$T(3)(5)\ I$

（7）$\exists xQ(x)$　　$EG(6)$

例 2.6.5　符号化下列命题并证明。

（1）只要今天天气不好，就一定有考生不能提前进入考场；当且仅当所有考生提前进入考场，考试才能准时进行。所以，如果考试准时进行，那么天气就好。

（2）每个考生或者勤奋或者聪明，所有勤奋的人都将有所作为，但并非所有考生都将有所作为。所以，一定有些考生是聪明的。

解　（1）设P：今天天气好。Q：考试准时进行。$A(x)$：x提前进入考场。个体域：考生的集合。则命题可符号化为：

$$\neg P \to \exists x\neg A(x),\ \forall xA(x) \leftrightarrow Q \Rightarrow Q \to P$$

1）$\neg P \to \exists x\neg A(x)$　　P

2）$\neg P \to \neg\forall xA(x)$　　$T(1)\ E$

3）$\forall xA(x) \to P$　　$T(2)\ E$

4） $\forall xA(x)\leftrightarrow Q$　　P

5） $(\forall xA(x)\to Q)\wedge(Q\to\forall xA(x))$　　$T(4)\ E$

6） $Q\to\forall xA(x)$　　$T(5)\ I$

7） $Q\to P$　　$T(3)(6)\ I$

（2）设 $P(x)$：x 是考生。$Q(x)$：x 将有所作为。$A(x)$：x 是勤奋的。$B(x)$：x 是聪明的。个体域：人类的集合。则命题可符号化为：

$\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x)))$，$\forall x(A(x)\to Q(x))$，$\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$

$\Rightarrow\exists x(P(x)\wedge B(x))$

1） $\neg\forall x(P(x)\to Q(x))$　　P

2） $\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$　　$T(1)\ E$

3） $\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$　　$T(2)\ E$

4） $P(a)\wedge\neg Q(a)$　　$ES(3)$

5） $P(a)$　　$T(4)\ I$

6） $\neg Q(a)$　　$T(4)\ I$

7） $\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x)))$　　P

8） $P(a)\to(A(a)\vee B(a))$　　$US(7)$

9） $A(a)\vee B(a)$　　$T(5)(8)\ I$

10） $\forall x(A(x)\to Q(x))$　　P

11） $A(a)\to Q(a)$　　$US(10)$

12） $\neg A(a)$　　$T(6)(11)\ I$

13） $B(a)$　　$T(9)(12)\ I$

14） $P(a)\wedge B(a)$　　$T(5)(13)\ I$

15） $\exists x(P(x)\wedge B(x))$　　$EG(14)$

例 2.6.6　符号化下列命题并推证其结论。

每个运动员都是强壮的，每一个既强壮又聪明的人将在事业中获得成功。张三是运动员，并且是聪明的。所以张三一定能在事业中获得成功。

解　设 $P(x)$：x 是运动员。$Q(x)$：x 是强壮的。$R(x)$：x 是聪明的。$S(x)$：x 在事业中获得成功。a：张三。个体域为人类的集合。则命题可符号化为

$$\forall x(P(x)\to Q(x)),\ \forall x(Q(x)\wedge R(x)\to S(x)),\ P(a)\wedge R(a)\Rightarrow S(a)$$

（1） $\forall x(P(x)\to Q(x))$　　P

（2） $P(a)\to Q(a)$　　$US(1)$

（3） $P(a)\wedge R(a)$　　P

（4） $Q(a)$　　$T(2)(3)\ I$

（5） $\forall x(Q(x)\wedge R(x)\to S(x))$　　P

（6） $Q(a)\wedge R(a)\to S(a)$　　$US(5)$

（7） $R(a)$　　$T(3)\ I$

（8）$Q(a) \wedge R(a)$　　$T(4)(7)\ I$

（9）$S(a)$　　$T(6)(8)\ I$

例 2.6.7　符号化下列命题并推证其结论。

有些病人相信所有的医生，但病人都不相信骗子。所以，医生都不是骗子。

解　设 $P(x)$：x 是病人。$D(x)$：x 是医生。$Q(x)$：x 是骗子。$L(x,y)$：x 相信 y。

前提：$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)))$，$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \to \neg L(x,y))$

结论：$\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$

（1）$\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)))$　　P

（2）$P(a) \wedge \forall y(D(y) \to L(a,y))$　　$ES(1)$

（3）$\forall y(D(y) \to L(a,y))$　　$T(2)\ I$

（4）$D(b) \to L(a,b)$　　$US(3)$

（5）$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y) \to \neg L(x,y))$　　P

（6）$\forall y(P(a) \wedge Q(y) \to \neg L(a,y))$　　$US(5)$

（7）$P(a) \wedge Q(b) \to \neg L(a,b)$　　$US(6)$

（8）$P(a) \to (Q(b) \to \neg L(a,b))$　　$T(7)\ E$

（9）$P(a)$　　$T(2)\ I$

（10）$Q(b) \to \neg L(a,b)$　　$T(8)(9)\ I$

（11）$L(a,b) \to \neg Q(b)$　　$T(10)\ E$

（12）$D(b) \to \neg Q(b)$　　$T(4)(11)\ I$

（13）$\forall x(D(x) \to \neg Q(x))$　　$UG(12)$

例 2.6.8　下列推理过程是否正确。

（1）$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$　　P

（2）$P(c) \wedge Q(c)$　　$ES(1)$

（3）$P(c)$　　$T(2)\ I$

（4）$\exists y(R(y) \wedge S(y))$　　P

（5）$R(c) \wedge S(c)$　　$ES(4)$

（6）$R(c)$　　$T(5)\ I$

（7）$P(c) \wedge R(c)$　　$T(3)(6)\ I$

（8）$\exists x(P(x) \wedge R(x))$　　$EG(7)$

解　上述推理过程是错误的。由于在（2）中引入了个体常量 c，而在（5）中又引入了个体常量 c，结果推出了错误的结论。如果在（5）中引入了个体常量 d（一般地 $d \neq c$），则只有 $P(c) \wedge R(d)$，从而无法推出 $\exists x(P(x) \wedge R(x))$。

例 2.6.9　举例说明下列推理中的错误，并指出错误的原因。

（1）$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \neg Q(c)$　　P

（2）$(P(c) \to Q(c)) \wedge \neg Q(c)$　　$US(1)$

（3）$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \neg Q(x)$ $UG(2)$

（4）$(P(y) \to Q(y)) \wedge \neg Q(y)$ $US(3)$

（5）$P(y) \to Q(y)$ $T(4)\ I$

（6）$\neg Q(y)$ $T(4)\ I$

（7）$\neg P(y)$ $T(5)(6)\ I$

（8）$\forall x \neg P(x)$ $UG(7)$

解 在（3）中出现错误。因为（2）中的c是个体常元，不能引入全称量词（只能引入存在量词），而在（3）中引入了全称量词，因此出现错误。举例如下：设个体域为人类的集合。$P(x)$：x是中国人。$Q(x)$：x是黄种人。C：John（假定John 是白种人），则$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \neg Q(\text{John})$为真命题，可得结论$\forall x \neg P(x)$，表示所有的人都不是中国人，是假的，正确的结论应是：$\neg P(\text{John})$，即 John 不是中国人。

习题二

1．用谓词表达式写出下列命题：

（1）小张不是教师。

（2）他是田径或球类运动员。

（3）小丽聪明而且美丽。

（4）若m是奇数，则$2m$不是奇数。

（5）每个有理数是实数。

（6）有的函数连续。

2．将下列命题符号化：

（1）没有最大的自然数。

（2）一切鸟都能飞。

（3）没有一只麒麟是动物。

（4）有的数不是有理数。

3．将下列命题符号化：

（1）所有的人都长头发。

（2）有的人吸烟。

（3）没有人登上过木星。

（4）清华大学的学生未必都是高素质的。

4．符号化下列命题：

（1）每个人的外祖父都是他母亲的父亲。

（2）尽管有人聪明，但未必一切人都聪明。

5．指出下列公式的作用域与变元约束的情况：

（1）$\forall x(P(x) \to Q(x))$

（2）$\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$

（3）$\forall x \forall y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$

（4）$\forall x(P(x) \wedge \exists x Q(x,z) \to \exists y R(x,y)) \vee Q(x,y)$

6．对下列谓词公式中约束变元进行换名：

（1）$\forall x \exists y(P(x,z) \to Q(y)) \leftrightarrow S(x,y)$

（2）$(\forall x(P(x) \to (R(x) \vee Q(x))) \wedge \exists x R(x)) \to \exists z S(x,z)$

7．对下列谓词公式中自由变元进行代入：

（1）$(\exists y A(x,y) \to \forall x B(x,z)) \wedge \exists x \forall z C(x,y,z)$

（2）$(\forall y P(x,y) \wedge \exists z Q(x,z)) \vee \forall x R(x,y)$

8．设下面所有谓词的个体域 $E=\{a,b,c\}$，试将下面的表达式中的量词消去，写成与之等价的命题公式：

（1）$\forall x R(x) \wedge \exists x S(x)$

（2）$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$

（3）$\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$

9．判断下列推证是否正确：

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x) \to Q(x)) &\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x P(x)) \vee \forall x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall x Q(x)
\end{aligned}
$$

10．证明下列等价式：

（1）$\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$

（2）$\neg \forall x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

11．判断下列蕴含式是否成立：

（1）$\exists x \exists y(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x)$

（2）$(\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$

（3）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

12．求下列谓词公式的前束析取范式和前束合取范式：

（1）$(\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$

（2）$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee (\exists u)Q(x,y,u))$

（3）$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)((\forall z)Q(x,y) \to \neg(\forall z)R(y,x)))$

（4）$(\forall x)[(\forall y)P(x) \vee (\forall z)Q(z,y) \to \neg(\forall y)R(x,y)]$

13．证明下列各式：

（1）$\forall x(A(x) \to B(x))$，$\forall x(C(x) \to \neg B(x)) \Rightarrow \forall x(C(x) \to \neg A(x))$

（2）$\forall x(A(x) \vee B(x))$，$\forall x(B(x) \to \neg C(x))$，$\forall x C(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

（3）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

14．符号化下列命题并推证其结论：

（1）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车。每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

（2）某学术会议的每个成员都是专家并且是工人，有些成员是青年人，所以，有些成员是青年专家。

（3）所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此，某些实数是整数。

（4）每个大学生不是文科生就是理科生，有的大学生是优等生，小张不是理科生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。

15．判断下列推理是否正确，若有错误，请找出：

（1）$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P 规则
（2）$P(y) \to Q(y)$	$US(1)$
（3）$\exists x P(x)$	P 规则
（4）$P(y)$	$ES(3)$
（5）$Q(y)$	$T(2)(4)\ I$
（6）$\exists x Q(x)$	$EG(5)$

实验二　命题逻辑简单推理系统

1．实验目的

熟悉推理系统的形式结构，理解推理规则的作用，体验自动推理的效果，增加学习兴趣。

2．实验内容

编程实现以简单的命题公式为前提到结论的推理过程。

3．实验要求

列出实验目的、实验内容、实验步骤、源程序和实验结果。

4．实验参考

将推理问题的已知前提中的每一命题公式转化为合取范式，具体过程参考1.7.2 节，合取范式中的每个简单析取式就可当作独立的前提条件，然后运用下列规则对所有前提条件进行推理：①假言推理：已知 P 和 $\neg P \vee Q$，即有结论：Q；②合并：已知：$P \vee Q$ 和 $\neg P \vee Q$，即有结论：Q；③重言式：已知 $P \vee Q$ 和 $\neg P \vee \neg Q$，即有结论：$P \vee \neg P$ 和 $Q \vee \neg Q$；④矛盾式：已知 $\neg P$ 和 P，即有结论：NIL；⑤三段论：已知 $\neg P \vee Q$ 和 $\neg Q \vee R$，即有结论：$\neg P \vee R$。从而推导新的结论，具体推导过程如下。

（1）问题的提出。

数理逻辑的主要任务就是用数学的方法来研究数学中的推理。所以理解推理的形式结构非常重要。而应用计算机实现自动推理，是计算机科学工作者追求的

目标。那么，如何利用计算机来进行推理呢？

（2）问题探索。

利用计算机实现命题公式为前提进行推理的关键是：通过适当的数据结构表示出以命题公式描述的前提，运用推理规则得到所希望的结论。对于这两个问题，让学生充分发表意见和讨论，积极探索求解方法。

（3）小组交流和教师提示。

根据学生交流的情况，教师适当进行提示。

对于第一个问题，通过观察人工推理的过程，明确每一步推理都是应用两个前提（包括推理已得到的结论）获得一个结论的过程。

对于第二个问题，可以利用高级语言一些特殊处理方式来实现。例如，在 C 语言中提供了逻辑非（!）、逻辑与（&&）、逻辑或（||），这 3 个逻辑联结词正好对应命题逻辑中的非$\neg$、合取$\wedge$和析取$\vee$，且优先级完全一致。由于在命题逻辑中，$\{\neg, \wedge, \vee\}$为全功能联结词组，可以表达任一命题公式，因此，对于任一命题公式，只要将其转换为合取范式就可以进行计算了。

对合取范式的每个简单析取式，其表示的数据结构，建议采用数组的形式，如 $P\vee Q\vee(\neg R)$可表示为：$S[1]=(P,Q,R)$ $N[1]=(1,1,0)$，0 表示否定运算。对所有的前提，包括新产生的结论，任取两个前提根据上面提到的 5 条规则，得到新的结论。每次产生新的结论都要判定是否为所论证的结论，若是则程序退出，命题得证。如遍历所有前提后，没有新的结论产生，程序退出，命题为假。

（4）编程实现。

使用 Visual C++进行编程。

（5）问题的验证。

根据输入前提条件数据验证输出结论的正确性。

（6）问题的拓展。

再次启发学生思考怎样处理谓词公式为前提的推理问题。

（7）写出简要实验报告。