第 7 章　常微分方程

本章学习目标

- 了解微分方程、解、通解、初始条件和特解等概念
- 会识别一阶微分方程，包括可分离变量的方程、齐次方程、一阶线性微分方程和伯努利方程
- 熟练掌握可分离变量的方程及一阶线性微分方程的解法．会解简单的齐次方程和伯努利方程
- 知道下列几种特殊的高阶微分方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$
- 了解二阶线性微分方程解的结构
- 熟练掌握二阶常系数线性齐次微分方程的解法
- 熟练掌握自由项为多项式函数、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的乘积的二阶常系数线性非齐次微分方程的解

函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系，但在几何学、力学、物理学以及工程技术中经常会遇到稍微复杂一些的运动过程，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来，却能比较容易地建立这些变量和它们的导数（或微分）之间的关系式．这种联系着自变量、未知函数及它的导数（或微分）的关系式，称为微分方程．如果在一个微分方程中出现的未知函数只含有一个自变量，这个方程就称为常微分方程．本章将重点研究常微分方程的解法．

7.1　常微分方程的基本概念

例 7.1.1　物体冷却过程的数学模型．

将某物体放置于空气中，在时间 $t=0$ 时，测得它的温度为 $u_0=150$ ℃，10 min 后测得温度为 $u_1=100$ ℃．我们要求此物体的温度 u 与时间 t 的关系，并计算 20min 后物体的温度．这里我们假定空气的温度保持为 $u_{\mathrm{a}}=24$ ℃．

解　设物体在 t 时的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 来表示．注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u>u_{\mathrm{a}}$，所以温差 $u-u_{\mathrm{a}}$ 恒

正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化的速度 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 恒负．因此，由牛顿（Newton）冷却定律（在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例）得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_{\mathrm{a}})\,. \tag{7.1.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数．方程（7.1.1）就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，这样的方程称为一阶微分方程．现在，我们给出微分方程的定义．

定义 7.1.1　含有自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程，称为微分方程．

如果微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，则称其为常微分方程．本章只讨论几种特殊的常微分方程——简称微分方程，有时更简称为“方程”．如果微分方程中的未知函数是两个或两个以上变量的函数，则称其为偏微分方程．

微分方程中的未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶．当微分方程所含的未知函数及其各阶导数全是一次幂时，称其为线性微分方程．在线性微分方程中，若未知函数及其各阶导数的系数全是常数，则称其为常系数线性微分方程．

例如，微分方程 $3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x=0$ 是一阶非线性微分方程，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-a^2y$ 是二阶常系数线性微分方程．

一般地，n 阶微分方程的形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\,, \tag{7.1.2}$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数，$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数且必含有 $y^{(n)}$．

若能从（7.1.2）解出 $y^{(n)}$，则（7.1.2）变为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\,. \tag{7.1.3}$$

（7.1.2）式称为隐式微分方程，（7.1.3）式称为显式微分方程．本章主要讨论显式微分方程．

定义 7.1.2　如果将一个函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程（7.1.2）或方程（7.1.3），方程两边恒等，则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程（7.1.2）或方程（7.1.3）的解．

定义 7.1.3　如果含有 n 个独立的任意常数 C_1，C_2，$\cdots$，C_n 的函数

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

或

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$$

是方程（7.1.3）的解，则称其为方程（7.1.3）的通解；微分方程通解中的任意常数若被确定，这种不含任意常数的解，称为微分方程的特解．

例如，$y=x^2+C$ 和 $y=x^2+1$ 都是 $y'=2x$ 的解．其中 $y=x^2+C$ 中含有一个任意常数 C，为其微分方程的通解，而 $y=x^2+1$ 是 $C=1$ 时该微分方程的解，为其微分方程的特解．

为了确定方程（7.1.3）的某个特解，首先要求出方程（7.1.3）的通解，再根据实际情况给出确定通解中 n 个任意常数的条件，称为定解条件，最后求出满足定解条件的特解．由定解条件求特解的问题，称为微分方程的定解问题．常见的定解条件有初始条件．一般 n 阶微分方程的初始条件为

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},$$

其中 y_0，y_0'，$\cdots$，$y_0^{(n-1)}$ 为给定常数，初始条件的个数应与微分方程的阶数相同．

求微分方程满足初始条件的解的问题，称为微分方程的初值问题．以后只讨论初值问题．

一阶微分方程的初值问题是求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 的解的问题，记为

$$\begin{cases} y'=f(x,y)\ , \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0\ \ . \end{cases} \tag{7.1.4}$$

二阶微分方程的初值问题是

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y')\ , \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0, y'\Big|_{x=x_0}=y_0'\ . \end{cases} \tag{7.1.5}$$

一阶微分方程初值问题（7.1.4）的特解 $y=\varphi(x)$ 的图形为 xOy 平面上的一条曲线，而方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的通解 $y=\varphi(x,C)$ 为 xOy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族．

积分曲线族上的每一点 (x,y) 处的切线斜率，正好等于 $f'(x,y)$，而满足初始条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线．所以，一阶微分方程的初值问题的几何意义是求微分方程通过点 (x_0,y_0) 的那条积分曲线．

二阶微分方程的初值问题（7.1.5）的几何意义是求微分方程 $y''=f(x,y,y')$ 通过点 (x_0,y_0)，而在该点处的切线斜率为 y_0' 的那条积分曲线．

例 7.1.1 指出下列微分方程哪个是线性的，哪个是非线性的，并指出阶数．

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+12xy=0$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos y+2x=0$；（4）$x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$．

解 （1）一阶线性；（2）二阶非线性；（3）一阶非线性；（4）二阶线性．

例 7.1.2 验证函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是一阶方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解．

解 由 $y=\dfrac{C}{x}$ 可得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{C}{x^2}$，将 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 y 代入方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ 中，得

$$-\frac{C}{x^2}=-\frac{\frac{C}{x}}{x}=-\frac{C}{x^2},$$

所以函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ 的解．又因为方程是一阶的，而函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 中只含一个任意常数，即任意常数的个数等于方程的阶数，所以函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解．

例 7.1.3 验证函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$（C_1，C_2 为任意常数）为二阶微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解，并求方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解．

解 因为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$， $y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}$， $y''=C_1e^x+4C_2e^{2x}$，

故
$$\begin{aligned}&y''-3y'+2y\\&=C_1e^x+4C_2e^{2x}-3(C_1e^x+2C_2e^{2x})+2(C_1e^x+C_2e^{2x})\\&=(C_1-3C_1+2C_1)e^x+(4C_2-6C_2+2C_2)e^{2x}=0.\end{aligned}$$

所以，函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是所给微分方程的解．又因为这个解中含有两个独立的任意常数 C_1、C_2，与所给方程的阶数相同，所以它是微分方程的通解．

由初始条件 $y(0)=0$ 得 $C_1+C_2=0$，由初始条件 $y'(0)=1$ 得 $C_1+2C_2=1$，所以 $C_1=-1$，$C_2=1$．于是，满足所给初始条件的特解为 $y=-e^x+e^{2x}$．

习题 7.1

1．指出下列方程的阶数，并指出其是否为线性方程：

（1） $y'=2x^2+6$； （2） $yy''=1$；

（3） $y''-3y'+2y=0$； （4） $y^{(10)}+8y^{(7)}+2y=\sin x$；

（5） $y''+2y'+xy=f(x)$； （6） $(y')^2+\sin y=0$；

（7） $y^{(4)}+2y''y'''+x^2=0$； （8） $y''+6xy'+3x^2y=e^x$．

2．指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

（1） $xy'=2y$，$y=5x^2$； （2） $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

（3） $y''-2y'+y=0$，$y=x^2e^x$；

（4） $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$，$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$．

3．在下列各题中，确定函数关系式所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

（1） $x^2-y^2=C$，$y\big|_{x=0}=5$；

（2） $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$， $y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$；

（3） $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y\big|_{x=\pi}=1$，$y'\big|_{x=\pi}=0$.

7.2 一阶微分方程

一阶微分方程是微分方程中最基本的一类方程，在经济管理科学中也最为常见，其一般形式为

$$F(x,y,y')=0,$$

其中 $F(x,y,y')$ 是 x、y、y' 的已知函数.

已解出 y' 的一阶微分方程形式为

$$y'=f(x,y),$$

其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 所以一阶微分方程也可写成对称形式为

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 . \tag{7.2.1}$$

方程（7.2.1）中，变量 x 与 y 对称，既可以将变量 y 视为 x 的函数，也可以将变量 x 视为 y 的函数.

以下我们讨论两种常见的一阶微分方程.

7.2.1 可分离变量的微分方程

形如

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{7.2.2}$$

的一阶微分方程称为可分离变量的微分方程.

设方程（7.2.2）中的函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续函数，则将方程（7.2.2）两边积分，得通解

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C .$$

其中 $\int g(y)\mathrm{d}y$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的一个具体原函数，C 为任意常数.

能够化为（7.2.2）的一阶微分方程，均称为可分离变量的微分方程，如方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y), \tag{7.2.3}$$

$$M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}y+N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}x=0 \tag{7.2.4}$$

均为可分离变量的微分方程. 将微分方程化为分离变量形式求解方程的方法，称为分离变量法.

例如，当 $g(y)\neq 0$ 时，可将（7.2.3）改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x,$$

这样变量被分离出来，两边再积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C,$$

其中 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示函数 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的某一原函数，C 为任意常数，从而可求得通解.

例 7.2.1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 y$ 的通解.

解 将方程分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3x^2\mathrm{d}x$，

两边积分 $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3x^2\mathrm{d}x + C_1,$$

得 $$\ln|y| = x^3 + C_1,$$

从而 $$|y| = \mathrm{e}^{x^3 + C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3},$$

即 $$y = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}.$$

因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 还是任意常数，可记为 C，所以原方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{x^3}.$$

在例 7.2.1 的求解过程中，用到了积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C,$$

以后为了运算及书写方便，可将公式中的 $\ln|u|$ 改写为 $\ln u$，最后得到的任意常数 C 可正可负.

例 7.2.2 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)y}$$

满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 这是一个可分离变量的微分方程．其中 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$，$g(y) = \frac{1+y^2}{y}$.

分离变量后，得 $$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C,$$

化简得 $$1+y^2 = C(1+x^2),$$

这是微分方程的隐式通解.

将初始条件 $x=0$，$y=1$ 代入通解中，得 $C=2$，故所求特解为

$$y^2=2x^2+1\ .$$

例 7.2.3 求微分方程 $4x\mathrm{d}x-3y\mathrm{d}y=3x^2y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 原微分方程为 $$4x\mathrm{d}x=3y(1+x^2)\mathrm{d}y\ ,$$

分离变量，得 $$3y\mathrm{d}y=\frac{4x}{1+x^2}\mathrm{d}x\ ,$$

两边积分，得 $$\frac{3}{4}y^2=\ln(1+x^2)+\ln C\ ,$$

故通解为 $$C(1+x^2)=\mathrm{e}^{\frac{3}{4}y^2}\ .$$

例 7.2.4 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$ 的通解.

解 此方程不能分离变量，但令 $u=x+y$，

则 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ ,$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\ ,$$

原方程可化为 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=u^2\ .$$

这是一个可分离变量的微分方程，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x\ ,$$

两边积分，得 $$\arctan u=x+C\ ,$$
即 $$u=\tan(x+C)\ ,$$
故原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$（C 为任意常数）.

例 7.2.5[*] 某公司 t 年净资产有 $W(t)$（单位：百万元），并且资产本身以每年5%的速度连续增长，同时该公司每年要以 3000 万元的数额连续支付职工工资.

（1）给出描述净资产 $W(t)$ 的微分方程；

（2）求解方程，这时假设初始净资产为 W_0；

（3）讨论在 $W_0=500,600,700$ 三种情况下，$W(t)$ 的变化特点.

解 （1）利用平衡法，即由

净资产增长速度 = 资产本身增长速度 − 职工工资支付速度，

得到方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0.05W-30\ ;$$

（2）分离变量，得 $$\frac{\mathrm{d}W}{W-600}=0.05\,\mathrm{d}t,$$
两边积分，得 $$\ln(W-600)=0.05t+\ln C,$$
即 $$W-600=C\mathrm{e}^{0.05t},$$
将 $W(0)=W_0$ 代入，得通解为
$$W=600+(W_0-600)\mathrm{e}^{0.05t},$$
上式推导过程中 $W\neq 600$，当 $W=600$ 时，$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0$，可知 $W=600=W_0$，通常称为平衡解，它仍包含在通解表达式中.

（3）由通解表达式可知，当 $W_0=500$ 时，净资产额单调递减，公司将在第 36 年破产；当 $W_0=600$ 时，公司将收支平衡，净资产保持在 600（百万元）不变；当 $W_0=700$ 元时，公司净资产将呈指数增长.

7.2.2 可化为可分离变量的微分方程——齐次微分方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.5}$$
的一阶微分方程，称为齐次微分方程，简称为齐次方程.

通过变量代换，齐次方程（7.2.5）可化为可分离变量方程求解，即令
$$u=\frac{y}{x}\ 或\ y=xu, \tag{7.2.6}$$
其中 u 是新的未知函数 $u=u(x)$.
（7.2.6）式两边对 x 求导，有 $y'=xu'+u$，代入方程（7.2.5），得
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u,$$
分离变量再积分，得 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C,$$
求出积分后，再将 $u=\frac{y}{x}$ 回代，即可求得原齐次方程的通解.

例 7.2.6 求方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解.

解 此方程为齐次方程，令 $u=\frac{y}{x}$，代入原方程，得
$$xu'+u=u+\tan u,$$
即 $$\frac{x\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u,$$

分离变量，得 $$\cot u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$
两边积分，得 $$\ln\sin u=\ln x+\ln C=\ln Cx,$$
即 $$\sin u=Cx,$$
将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，即得原方程通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx,\quad y=x\arcsin Cx\ \text{（其中}C\text{为任意常数）}.$$

例 7.2.7 求方程 $x^2\mathrm{d}y=(y^2-xy+x^2)\mathrm{d}x$ 的通解.

解 经过简单变形，可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-xy+x^2}{x^2},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}+1,$$

令 $y=ux$，则 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

将其代入上述方程，得 $$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2-u+1,$$

原方程已化成了可分离变量的微分方程.

分离变量，得 $$\frac{1}{(u-1)^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $$\int\frac{1}{(u-1)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

得 $$-\frac{1}{u-1}=\ln x+\ln C\quad\text{或}\quad(1-u)\ln Cx=1,$$

再以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，还原变量 y，得原方程的通解

$$(x-y)\ln Cx=x.$$

例 7.2.8* 设商品 A 和商品 B 的售价分别为 P_1、P_2，已知价格 P_1 与 P_2 相关，且价格 P_1 相对 P_2 的弹性为 $\dfrac{P_2\mathrm{d}P_1}{P_1\mathrm{d}P_2}=\dfrac{P_2-P_1}{P_2+P_1}$，求 P_1 与 P_2 的函数关系式.

解 所给方程为齐次方程，整理得 $$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P_2}=\frac{1-\dfrac{P_1}{P_2}}{1+\dfrac{P_1}{P_2}}\cdot\frac{P_1}{P_2},$$

令 $u=\dfrac{P_1}{P_2}$，则有 $$P_2u'+u=\frac{1-u}{1+u}u,$$

分离变量，得 $\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = 2\frac{\mathrm{d}P_2}{P_2}$，

两边积分，得 $\frac{1}{u}-\ln u = \ln P_2^2 + \ln C$，

将 $u=\frac{P_1}{P_2}$ 回代，得通解 $\mathrm{e}^{\frac{P_2}{P_1}} = CP_1P_2$，其中 C 为任意正常数.

7.2.3 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7.2.7}$$

的一阶微分方程，称为一阶线性微分方程，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 都是已知的连续函数；$Q(x)$ 称为自由项.

一阶线性微分方程的特点是方程中所含 y 和 y' 都是一次的.

若 $Q(x)\neq 0$，称方程（7.2.7）为一阶非齐次线性微分方程；若 $Q(x)\equiv 0$，即

$$y' + P(x)y = 0, \tag{7.2.8}$$

称为与一阶非齐次线性微分方程（7.2.7）相对应的一阶齐次线性微分方程.

1. 一阶齐次线性方程的解法

将（7.2.8）分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$，

两边积分，得 $\ln y = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln C$，

由此得（7.2.8）的通解

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{7.2.9}$$

其中 C 为任意常数.

显然 $y=0$ 也是（7.2.8）的解. 如果在（7.2.9）中允许 $C=0$，则 $y=0$ 也包含在（7.2.9）中，因而（7.2.8）的通解为（7.2.9）.

2. 一阶非齐次线性方程的解法

方程（7.2.7）的解可用“常数变易法”求解，即将与（7.2.7）对应的齐次方程（7.2.8）的通解中的任意常数 C 换成待定函数 $C(x)$，即

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{7.2.10}$$

设（7.2.10）是方程（7.2.7）的解，因为

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{7.2.11}$$

将（7.2.10）和（7.2.11）代入方程（7.2.7），求得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C, \tag{7.2.12}$$

将（7.2.12）代入（7.2.10），得一阶非齐次线性方程的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C], \qquad (7.2.13)$$

或
$$y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+Ce^{-\int P(x)dx}. \qquad (7.2.14)$$

（7.2.14）式中的第二项是齐次微分方程（7.2.8）的通解，记作Y，第一项是当$C=0$时的非齐次微分方程（7.2.7）的特解，记作y^*，则非齐次微分方程（7.2.7）的通解为$y=Y+y^*$.

例 7.2.9 求微分方程 $y'+y\tan x=2x\cos x$ 的通解.

解 此方程为一阶非齐次线性微分方程,其中$P(x)=\tan x$，$Q(x)=2x\cos x$.先求齐次线性微分方程$y'+y\tan x=0$的通解.

分离变量再积分，得
$$\frac{dy}{y}=-\tan x dx,$$

即
$$\ln y=\ln\cos x+\ln C,$$
$$y=C\cos x.$$

设所给方程的通解为
$$y=C(x)\cos x,$$

则
$$y'=-\sin x\cdot C(x)+\cos x\cdot C'(x),$$

将y和y'的表达式代入原方程中，有
$$-\sin x\cdot C(x)+\cos x\cdot C'(x)+C(x)\cos x\cdot\tan x=2x\cos x,$$

即
$$\cos x\cdot C'(x)=2x\cos x,$$

整理、分离变量并积分，得
$$C(x)=x^2+C,$$

将上式代入$y=C(x)\cos x$中，得原方程的通解为$y=(x^2+C)\cos x$.

若将上式改写成
$$y=C\cos x+x^2\cos x,$$

则第一项为齐次微分方程的通解，第二项为当$C=0$时的非齐次微分方程的一个特解.

例 7.2.10 求微分方程$y'=\dfrac{y+x\ln x}{x}$的通解及满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解.

解 将方程改写为
$$y'-\frac{1}{x}y=\ln x,$$

这是一阶非齐次线性微分方程且$P(x)=-\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\ln x$，

由（7.2.13）式得
$$y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}[\int\ln x e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C]$$
$$=x[\int\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+C]=x[\int\ln x\,d\ln x+C]=x\left[\frac{(\ln x)^2}{2}+C\right].$$

由初始条件 $y\big|_{x=1}=0$，得 $C=0$，

故所求特解为
$$y=\frac{1}{2}x(\ln x)^2 .$$

例 7.2.11 求方程 $(1+x\sin y)\,\mathrm{d}\,y-\cos y\,\mathrm{d}\,x=0$ 的通解.

解 若将 y 看作 x 的函数，方程变为
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\cos y}{1+x\sin y}, \tag{7.2.15}$$
此方程既不是一阶线性方程，也不是可分离变量方程，不便求解.

但若将 x 看作 y 的函数，即（7.2.15）式两边分子与分母颠倒，有
$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}=\frac{1+x\sin y}{\cos y}=\sec y+x\tan y,$$
即
$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}-x\tan y=\sec y,$$
上式关于未知函数 x 及其导数 $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$ 是线性的，也即一阶非齐次线性微分方程，其中 $P(y)=-\tan y$，$Q(y)=\sec y$.

由（7.2.13）式，得
$$x=\mathrm{e}^{-\int-\tan y\,\mathrm{d}\,y}[\int\sec y\mathrm{e}^{\int-\tan y\,\mathrm{d}\,y}\,\mathrm{d}\,y+C]$$
$$=\sec y[\int 1\,\mathrm{d}\,y+C]=\sec y(y+C),$$
所以，原方程通解为
$$x=\frac{y+C}{\cos y}.$$

例 7.2.12* 设某企业 t 时刻产值 $y(t)$ 的增长率与产值 $y(t)$ 以及新增投资 $2bt$ 有关，并满足方程
$$y'=-2aty+2bt, \tag{7.2.16}$$
其中 a、b 均为正常数，$y(0)=y_0<b$，求 $y(t)$.

解 方程（7.2.16）对应的齐次方程为
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=-2aty,$$
分离变量再积分，得
$$y=C\mathrm{e}^{-at^2},$$
令（7.2.16）的通解为
$$y=C(t)\mathrm{e}^{-at^2},$$
将 y 及 $y'=C'(t)\mathrm{e}^{-at^2}-2atC(t)\mathrm{e}^{-at^2}$ 代入（7.2.16）式，得
$$C'(t)=2bt\mathrm{e}^{at^2},$$
积分，得
$$C(t)=\frac{b}{a}\mathrm{e}^{at^2}+C,$$

于是方程（7.2.16）的通解为 $y(t)=\dfrac{b}{a}+C\mathrm{e}^{-at^2}$，

将初始条件 $y(0)=y_0$ 代入通解，得 $C=y_0-\dfrac{b}{a}$，

故所求产值函数为 $y(t)=\dfrac{b}{a}+\left(y_0-\dfrac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-at^2}$.

3*．伯努利（Bernoulli）方程

形如

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \quad （n\neq 0，1） \tag{7.2.17}$$

的方程称为伯努利方程，其中 n 为常数，当 $n=0$ 或 1 时是线性微分方程.

伯努利方程不是线性方程，但可通过变量替换 $z=y^{1-n}$，将其化为一阶线性微分方程.

将（7.2.17）式两边同除 y^n，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \tag{7.2.18}$$

将
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
代入（7.2.18），（7.2.17）式可化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x), \tag{7.2.19}$$

解得（7.2.19）的通解 $z=z(x)$，再代入 $z=y^{1-n}$ 中，即得（7.2.19）的通解

$$y^{n-1}\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=1,$$

其中 C 为任意常数.

伯努利方程也可利用常数变易法求解.

例 7.2.13 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

解 这是 $n=\dfrac{1}{2}$ 的伯努利方程．可令 $z=\sqrt{y}$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2},$$

其通解为 $$z=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{2}{x}\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{\ln|x|}{2}+C\right),$$

故原方程的通解为 $$y=z^2=x^4\left(\frac{\ln|x|}{2}+C\right)^2.$$

例 7.2.14 解微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{xy+x^2y^3}$.

解 此方程不属于已学过的类型（可分离变量、齐次、线性、伯努利方程）. 但若将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=xy+x^2y^3,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-yx=y^3x^2,$$

这是一个以 y 为自变量，x 为因变量的伯努利方程（$n=2$）. 令 $z=\dfrac{1}{x}$，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+yz=-y^3,$$

这是一个以 y 为自变量，z 因变量的线性方程，根据通解公式，得到方程的通解

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}=z&=\mathrm{e}^{-\int y\mathrm{d}x}\left(-\int y^3\mathrm{e}^{\int y\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\left(-\int y^3\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\left[-\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}}(y^2-2)+C\right]\\&=C\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2.\end{aligned}$$

现将一阶以及能化为一阶微分方程的解法归纳如表 7.1 所示.

表 7.1 一阶以及能化为一阶微分方程的解法

类型		微分方程	解法
可分离变量		$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$	分离变量，两边积分
一阶线性	齐次	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$	分离变量，两边积分；或用公式 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$
	非齐次	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$	常数变易法；或用公式 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$
可化为一阶线性方程		$y'+P(x)y=Q(x)y^n$	令 $z=y^{1-n}$，将原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ $y^{n-1}\mathrm{e}^{(n-1)\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int(1-n)Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=1$

习题 7.2

1．求下列微分方程的通解或特解.

（1） $y' + y = x\mathrm{e}^{x}$；

（2） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 0$；

（3） $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = x^{3}\mathrm{e}^{x}$， $y\big|_{x=1} = 0$；

（4） $xy' - 4y - x^{6}\mathrm{e}^{x} = 0$， $y\big|_{x=1} = 1$；

（5） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} - y$；

（6） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3xy = 2x$；

（7） $y' - \dfrac{2y}{x} = x^{2}\sin 3x$；

（8） $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^{2}}}{x}$；

（9） $(1+t^{2})\mathrm{d}s - 2ts\mathrm{d}t = (1+t^{2})^{2}\mathrm{d}t$；

（10） $2y\mathrm{d}x + (y^{2} - 6x)\mathrm{d}y = 0$ （提示：将 x 看成 y 的函数）；

（11） $y' - y = \cos x$， $y\big|_{x=0} = 0$；

（12） $y' + \dfrac{1-2x}{x^{2}}y = 1$， $y\big|_{x=1} = 0$.

2*．解下列伯努利方程.

（1） $xy' + y = -xy^{2}$；

（2） $y' + y = xy^{3}$；

（3） $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^{3}}{x^{2}}$；

（4） $y' - y = \dfrac{x^{2}}{y}$.

*7.3 可降阶的高阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程，可通过降阶法求其解．所谓降阶法，就是利用变换降低高阶微分方程阶数求其通解的方法．下面给出的几种特殊类型高阶方程的降阶法.

7.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

此类型的微分方程可通过等式两边逐次积分 n 次求得通解，即

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2,$$

$$\cdots$$

依此类推，便可得到含有 n 个任意常数的通解.

例 7.3.1 求解微分方程 $y''' = \sin x - \cos x$.

解 连续积分三次得到

$$y'' = \int(\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C_1,$$

$$y' = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \cos x + \sin x + \frac{C_1}{2}x^{2} + C_2 x + C_3 .$$

这就是微分方程的通解，其中 C_1，C_2，C_3 为任意常数。

例 7.3.2 求微分方程 $y^{(4)}=\mathrm{e}^x+x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$，$y''|_{x=0}=-1$，$y'''|_{x=0}=-1$ 的特解.

解 对方程连续积分四次，得

$$y'''=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C_1,\quad y''=\mathrm{e}^x+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2,$$

$$y'=\mathrm{e}^x+\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3,$$

$$y=\mathrm{e}^x+\frac{x^5}{120}+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4.$$

这就是微分方程的通解，其中 C_1，C_2，C_3，C_4 为任意常数.
再由初始条件 $x=0$ 时，$y'''=-1$，得 $C_1=-2$；$x=0$ 时，$y''=-1$，得 $C_2=-2$；$x=0$ 时，$y'=0$，得 $C_3=-1$；$x=0$ 时，$y=0$，得 $C_4=-1$，

故满足初始条件的特解为 $$y=\mathrm{e}^x+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{3}x^3-x^2-x-1.$$

7.3.2 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

微分方程

$$y''=f(x,y') \tag{7.3.1}$$

中不显含未知函数 y，但可通过变量替换将其降为一阶微分方程来求解.

令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，代入方程（7.3.1），得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p), \tag{7.3.2}$$

若能求出方程（7.3.2）的解 $p=p(x,C_1)$，则

$$y'=p(x,C_1), \tag{7.3.3}$$

再求解一阶微分方程（7.3.3），便得到通解 y.

例 7.3.3 求微分方程 $y''=\dfrac{2xy'}{x^2+1}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解.

解 设 $y'=p$，则 $y''=p'$ 代入后分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

两边积分，得 $$\ln p=\ln(x^2+1)+\ln C_1,$$
即 $$y'=C_1(x^2+1),$$

由初始条件 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，因此 $y'=3x^2+3$，

再积分，得 $$y=x^3+3x+C_2,$$
再由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，于是所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1 .$$

例 7.3.4 求解微分方程 $y'' = y' + x$.

解 设 $p = y'$ ，则 $y'' = p'$ ，原方程化为

$$p' = p + x, p' - p = x ,$$

$$p = e^{\int dx}(\int x e^{-\int dx} dx + C_1) = e^x(\int x e^{-x} dx + C_1)$$

$$= C_1 e^x - e^x(x e^{-x} + e^{-x}) = C_1 e^x - x - 1 ,$$

$$y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2 .$$

7.3.3 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

微分方程

$$y'' = f(y, y') \tag{7.3.4}$$

中不显含自变量 x . 因此也需通过变量替换，将其降为一阶微分方程来求解.

令 $y' = p$ ，但此时 p 看作是变量 y 的函数，即以 y 为新的自变量，$p = p(y)$ 为新的未知函数，利用复合函数的求导法则，得

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} ,$$

代入方程（7.3.4），得到一阶方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) , \tag{7.3.5}$$

设方程（7.3.5）的通解为

$$y' = p = \varphi(y, C_1) , \tag{7.3.6}$$

方程（7.3.6）为一阶可分离变量的微分方程，分离变量并积分，即可得到方程（7.3.4）的通解

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx + C_2 .$$

例 7.3.5 求解微分方程 $2yy'' + y'^2 = 0$ （ $y > 0$ ）.

解 设 $y' = p$ ，则 $$y'' = p \frac{dp}{dy} ,$$

代入方程后，有 $$2yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 ,$$

分离变量，有 $$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} ,$$

两边积分，有 $$\ln p = -\frac{1}{2} \ln y + \ln C ,$$

所以 $$p=\frac{C}{\sqrt{y}},$$

又由于 $$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以 $$\sqrt{y}\mathrm{d}y=C\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $$y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2\ \left(C_1=\frac{3}{2}C\right),$$

故 $$y=(C_1x+C_2)^{\frac{2}{3}}.$$

现将可降阶的高阶微分方程的解法归纳如表 7.2 所示。

表 7.2　可降阶的高阶微分方程的解法

类型	解法（降阶法）
$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x)$	连续积分 n 次
$y''=f(x,y')$	令 $y'=p$，则 $y''=p'$，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$
$y''=f(y,y')$	令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$

***习题 7.3**

求下列各微分方程的通解.

（1）$y''=x+\sin x$；　　（2）$y'''=xe^x$；

（3）$y''=\frac{1}{x^2}$；　　（4）$y''=1+(y')^2$；

（5）$y''=y'+x$；　　（6）$xy''+y'=0$；

（7）$yy''+1=(y')^2$；　　（8）$y^3y''-1=0$；

（9）$y''=(y')^3+y'$.

7.4　二阶常系数线性微分方程

7.4.1　二阶线性微分方程解的性质

形如
$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{7.4.1}$$
的微分方程称为二阶线性微分方程.

当 $f(x)\equiv 0$ 时，称方程
$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{7.4.2}$$

为二阶齐次线性微分方程．当 $f(x)\neq 0$ 时，称（7.4.1）式为二阶非齐次线性微分方程.

特别地，若 $p(x)$，$q(x)$ 分别为常数 p，q 时，方程（7.4.1），（7.4.2）分别为

$$y''+py'+qy=f(x)\,, \tag{7.4.3}$$

$$y''+py'+qy=0\,. \tag{7.4.4}$$

方程（7.4.3）称为二阶常系数非齐次线性微分方程，方程（7.4.4）称为二阶常系数齐次线性微分方程.

为了研究二阶常系数线性微分方程的解法，首先讨论二阶齐次线性微分方程解的结构.

定理 7.4.1 如果 y_1，y_2 是方程（7.4.2）的两个解，C_1，C_2 为任意常数，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是（7.4.2）的解.

证明 由定理假设，有

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0\,,\quad y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0\,.$$

分别用 C_1，C_2 乘以上面两式后相加，得

$$C_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]=0\,,$$

即
$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)=0\,,$$

证得 $C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（7.4.2）的解.

定理 7.4.1 表明，二阶齐次线性微分方程的解符合叠加原理，但叠加后的解 $C_1y_1+C_2y_2$ 是否为（7.4.2）的通解？

我们知道，一个二阶微分方程的通解中应含有两个相互独立的任意常数．若 $y_2=ky_1$（k 为常数），则

$$C_1y_1+C_2y_2=C_1y_1+C_2ky_1=(C_1+kC_2)y_1=Cy_1\,,$$

即常数合为一个，此时 $C_1y_1+C_2y_2$ 不是方程（7.4.2）的通解．若 $\dfrac{y_2}{y_1}\neq k$（k 为常数），则 $C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（7.4.2）的通解.

若 $\dfrac{y_2}{y_1}\neq k$（k 为常数），则称 y_1 与 y_2 是线性无关的（或线性独立的）；否则称为线性相关的.

综合以上分析，有如下定理：

定理 7.4.2 如果 y_1，y_2 是方程（7.4.2）的两个线性无关的特解，则 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程（7.4.2）的通解.

例如，容易验证 $y_1=\mathrm{e}^{-x}$ 与 $y_2=x\mathrm{e}^{-x}$ 都是方程 $y''+2y'+y=0$ 的解，而且 $\dfrac{y_2}{y_1}=x$，不为常数，即 e^{-x} 与 $x\mathrm{e}^{-x}$ 线性无关，故 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$ 是方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解.

类似于一阶线性微分方程，有

定理 7.4.3 如果 y^* 是二阶非齐次微分方程（7.4.1）的一个特解，而 $Y=C_1y_1+C_2y_2$ 是与（7.4.1）对应的齐次微分方程（7.4.2）的通解，则 $y=Y+y^*$ 为非齐次微分方程（7.4.1）的通解.

证明 由定理假设，有

$$Y''+p(x)Y'+q(x)Y=0\,,$$

$$y^{*\prime\prime}+p(x)y^{*\prime}+q(x)y^*=f(x)\,,$$

上面两式相加，得

$$(Y+y^*)''+p(x)(Y+y^*)'+q(x)(Y+y^*)=f(x)\,,$$

即 $Y+y^*$ 是方程（7.4.1）的通解.

例如，方程 $y''+2y'+y=x+2$ 是二阶非齐次线性微分方程，$Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$ 是对应的二阶齐次微分方程的通解；又可验证 $y^*=x$ 为所给方程的一个特解，因此

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}+x$$

为所给方程的通解.

定理 7.4.4 设二阶非齐次线性微分方程（7.4.1）的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)\,,\tag{7.4.5}$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 为原方程的特解.

证明 将 $y=y_1^*+y_2^*$ 代入式（7.4.5）的左端，得

$$\begin{aligned}&(y_1^*+y_2^*)''+p(x)(y_1^*+y_2^*)'+q(x)(y_1^*+y_2^*)\\&=(y_1^{*\prime\prime}+p(x)y_1^{*\prime}+q(x)y_1^*)+(y_2^{*\prime\prime}+p(x)y_2^{*\prime}+q(x)y_2^*)\\&=f_1(x)+f_2(x)\,,\end{aligned}$$

因此，$y_1^*+y_2^*$ 是方程（7.4.5）的一个特解.

此定理通常称为二阶非齐次线性微分方程的解的叠加原理.

定理 7.4.1 至定理 7.4.4 都可推广到 n 阶（齐次、非齐次）线性微分方程，这里不再赘述.

7.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

由以上讨论可知，若要求二阶常系数齐次线性微分方程（7.4.4）的通解，只需求其两个线性无关的特解.

由于指数函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$（r 为实的或复的常数）和它的各阶导数都只相差一个常数因子，所以我们用 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 来尝试，选取适当的常数 r，使得 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 满足方程（7.4.4）.

将 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 求导，得 $y'=r\mathrm{e}^{rx}$， $y''=r^2\mathrm{e}^{rx}$，再将 y、y' 和 y'' 代入方程（7.4.4），得

$$\mathrm{e}^{rx}(r^2+pr+q)=0.$$

由于 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，所以有

$$r^2+pr+q=0. \tag{7.4.6}$$

由此可见，若 r 是方程（7.4.6）的一个根，则函数 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 就为方程（7.4.4）的一个解．

方程（7.4.6）称为方程（7.4.4）的特征方程．这样求方程（7.4.4）的解就转化为求它的特征方程（7.4.6）的根的问题．

特征方程（7.4.6）是一个二次代数方程，其根 r_1、r_2 可用公式

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

求出，由根的三种可能情况，可得方程（7.4.4）的通解．

（1）特征方程（7.4.6）有两个不相等的实根：$r_1\neq r_2$．

此时，$y_1=\mathrm{e}^{r_1x}$，$y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$ 是方程（7.4.4）的两个解，并且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{\mathrm{e}^{r_2x}}{\mathrm{e}^{r_1x}}=\mathrm{e}^{(r_2-r_1)x}$ 不是常数，所以方程（7.4.4）的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

（2）特征方程（7.4.6）有两个相等的实根：$r_1=r_2=r$．

这时，只得到方程（7.4. 4）的一个解为 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$．

为得到（7.4. 4）的通解，还需求出另一个解 y_2，并且满足 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 不是常数．

设 $\dfrac{y_2}{y_1}=u(x)$，即 $y_2=y_1u(x)=\mathrm{e}^{rx}u(x)$，下面来求 $u(x)$．

将 y_2 求导，得

$$y_2'=\mathrm{e}^{rx}(u'+ru),\quad y_2''=\mathrm{e}^{rx}(u''+2ru'+r^2u),$$

再将 y_2、y_2' 和 y_2'' 代入方程（7.4.4），得

$$\mathrm{e}^{rx}[(u''+2ru'+r^2u)+p(u'+ru)+qu]=0,$$

等号两端约去 e^{rx}，并按 u''、u'、u 顺序合并同类项，得

$$u''+(2r+p)u'+(r^2+pr+q)u=0,$$

由于 r 是特征方程（7.4.6）的二重根．因此 $r^2+pr+q=0$，且 $2r+p=0$，于是得 $u''=0$．

因为只需要得到一个不为常数的解，所以不妨选取 $u=x$，由此得方程（7.4.4）的另一个解

$$y_2=x\mathrm{e}^{rx}.$$

从而方程（7.4.4）的通解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = e^{rx}(C_1 + C_2 x).$$

（3）特征方程（7.4.6）有一对共轭复根：$r_1 = \alpha + i\beta$，$r_2 = \alpha - i\beta$（$\beta \neq 0$）.

这时，$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$，$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ 是方程（7.4.4）的两个解，但它们是复值函数，为了得到实数形式的解，需利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

将 y_1、y_2 改写为

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

由于复值函数 y_1 与 y_2 之间成共轭关系，因此，取它们的和除以 2 就得到它们的实部，取它们的差除以 2i 就得到它们的虚部．由于方程（7.4.4）的解符合叠加原理，所以实值函数

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

还是方程（7.4.4）的解，且 $\dfrac{\overline{y}_1}{\overline{y}_2} = \dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \cot\beta x$ 不是常数，所以方程（7.4.4）的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解的步骤如下：

（1）写出方程（7.4.4）的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

（2）求特征方程的两个根 r_1，r_2.

（3）根据特征方程的两个根的三种不同情形，按照表 7.3 写出方程（7.4.4）的通解.

表 7.3　二阶常系数齐次线性微分方程的解

类型	特征方程	通解
二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	两不等实根 $r_1 \neq r_2$，$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
		两相等实根 $r_1 = r_2 = r$，$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
		一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

例 7.4.1　解方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$.

解　其特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 或 $(r+1)(r-3) = 0$，

于是 $$r_1=-1,\ r_2=3,$$
故原方程通解为 $$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

例 7.4.2 解方程 $y''-4y'+4y=0$.

解 其特征方程为 $r^2-4r+4=0$，有两个相等的实根 $r_1=r_2=2$，
故原方程通解为 $$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

例 7.4.3 解方程 $y''-2y'+5y=0$.

解 其特征方程为 $r^2-2r+5=0$，$r_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$ 为一对共轭复根，
故原方程通解为 $$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

7.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

由定理 7.4.3 知，二阶常系数非齐次线性微分方程（7.4.3）
$$y''+py'+qy=f(x)$$
的通解是它对应的二阶常系数齐次线性微分方程（7.4.4）的通解与它本身的一个特解之和．二阶常系数齐次线性微分方程的通解问题已经解决，所以这里只讨论求二阶常系数非齐次线性方程一个特解 y^* 的方法．对于这个问题，我们只对 $f(x)$ 取以下两种常见形式进行讨论．

（1）$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中 $P_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 m 次多项式，λ 为常数．

方程（7.4.3）的特解 y^* 是使（7.4.3）成为恒等式的函数．因为（7.4.3）式右端的 $f(x)$ 是多项式 $P_m(x)$ 与指数函数 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的乘积，而多项式与指数函数乘积的导数仍然是多项式与指数函数的乘积，所以猜测到方程（7.4.3）的特解应为 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$（其中 $Q(x)$ 是某个多项式）的形式．为此可将 y^*，$y^{*\prime}$ 及 $y^{*\prime\prime}$ 代入方程（7.4.3），选取适当的多项式 $Q(x)$，使 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 满足方程（7.4.3）．具体讨论方法如下：

由 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 求得
$$y^{*\prime}=\mathrm{e}^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)],$$
$$y^{*\prime\prime}=\mathrm{e}^{\lambda x}[\lambda^2Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)],$$
将 y^*，$y^{*\prime}$ 及 $y^{*\prime\prime}$ 代入方程（7.4.3）并消去 $\mathrm{e}^{\lambda x}$，得
$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_{\mathrm{m}}(x).\tag{7.4.7}$$

（1）若 λ 不是特征方程（7.4.6）的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$．由于 $P_m(x)$ 是一个 m 次多项式，要使（7.4.7）的两端恒等，可令 $Q(x)$ 为另一个 m 次多项式 $Q_m(x)$：
$$Q(x)=Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$
代入（7.4.7）式，比较等式两端 x 同次幂的系数，得到以 b_0，b_1，$\cdots$，b_m 为未知数的 $m+1$ 个方程的联立方程组，解出 b_0，b_1，$\cdots$，b_m，就得到所求的特解

$y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$.

（2）若λ是特征方程（7.4.6）的单根，即$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，但$2\lambda + p \neq 0$，此时（7.4.7）式成为$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) = P_m(x)$，要使其两端恒等，$Q'(x)$必须是一个$m$次多项式，可令

$$Q(x) = xQ_m(x),$$

用同样的方法确定$Q_m(x)$中的系数b_0，b_1，…，b_m，从而求出特解.

（3）若λ是特征方程（7.4.6）的重根，即$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，且$2\lambda + p = 0$，此时（7.4.7）式成为$Q''(x) = P_m(x)$，若要使其两端恒等，$Q''(x)$必须是一个$m$次多项式，可令

$$Q(x) = x^2 Q_m(x),$$

用同样的方法确定$Q_m(x)$中的系数b_0，b_1，…，b_m.

综上所述，可得以下结论：

如果$f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，那么方程（7.4.3）具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$$

的特解，其中$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$是一个与$P_m(x)$同次的待定多项式，$k$为整数，且

$$k = \begin{cases} 0, \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根时；} \\ 1, \text{当 } \lambda \text{ 是单特征根时；} \\ 2, \text{当 } \lambda \text{ 是重特征根时.} \end{cases}$$

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程，但这时k是特征方程含根λ的重复次数（即若λ不是特征方程的根，则k取0；若λ是特征方程的s重根，则k取s）.

例 7.4.4　求微分方程$y'' - 5y' + 6y = e^x$的一个特解.

解　这里$P_m(x) = 1$，$\lambda = 1$不是特征根，因此$k = 0$，所以设该方程特解为

$$y^* = be^x,$$

求出$y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$代入原方程，得

$$be^x - 5be^x + 6be^x = e^x,$$

即
$$2be^x = e^x.$$

比较两边的系数，得$b = \dfrac{1}{2}$，

故　$y^* = \dfrac{1}{2}e^x$是原方程的一个特解.

例 7.4.5　求微分方程$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$的一个特解.

解　原方程所对应的齐次方程的特征方程为$r^2 - 2r - 3 = 0$，特征根为$r_1 = 3$，$r_2 = -1$，从而对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} .$$

将右端项 $3x+1$ 看作 $(3x+1)e^{0x}$，因为 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^* = b_1 x + b_0 .$$

代入原方程得 $$-3b_1 x - 2b_1 - 3b_0 = 3x + 1 ,$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases} -3b_1 = 3, \\ -2b_1 - 3b_0 = 1. \end{cases}$$

由此求得 $$b_0 = \frac{1}{3} ,\quad b_1 = -1 .$$

于是所求特解为 $$y^* = -x + \frac{1}{3} .$$

因此，原微分方程的通解为 $$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x + \frac{1}{3} .$$

例 7.4.6 求微分方程 $y'' + 6y' + 9y = 5xe^{-3x}$ 的通解.

解 原方程所对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 6r + 9 = 0$，特征根是重根，$r_1 = r_2 = -3$，于是齐次方程通解为

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} .$$

原方程中，$f(x) = 5xe^{-3x}$，其中 $P_m(x) = 5x$ 是一次多项式，$\lambda = -3$ 是特征方程的重根，故 k =2，于是设原方程特解为

$$y^* = x^2 (b_1 x + b_0)e^{-3x} ,$$

求 $y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$，得

$$y^{*\prime} = e^{-3x}[-3b_1 x^3 + (3b_1 - 3b_0)x^2 + 2b_0 x] ,$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{-3x}[9b_1 x^3 + (-18b_1 + 9b_0)x^2 + (6b_1 - 12b_0)x + 2b_0] ,$$

代入原方程，得

$$(6b_1 x + 2b_0)e^{-3x} = 5xe^{-3x} ,$$

于是 $$6b_1 = 5 ,\quad 2b_0 = 0 ,$$

解得 $$b_1 = \frac{5}{6} ,\quad b_0 = 0 .$$

因此 $$y^* = \frac{5}{6} x^3 e^{-3x} ,$$

于是原方程的通解为 $$y = Y + y^* = \left(\frac{5}{6} x^3 + C_2 x + C_1\right)e^{-3x} .$$

2. $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

利用欧拉公式，将三角函数表示为复变指数函数的形式，有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l \cos \omega x + P_n \sin \omega x] \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2} + P_n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\right] \\
&= \left(\frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \left(\frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x} \\
&= P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + \bar{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x},
\end{aligned}
$$

其中
$$P(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2\mathrm{i}} = \frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2}\mathrm{i}$$
与
$$\bar{P}(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{P_n}{2\mathrm{i}} = \frac{P_l}{2} + \frac{P_n}{2}\mathrm{i}$$
是互为共轭的 m 次多项式（即它们对应的系数是共轭复数），而 $m = \max\{l, n\}$.

仿以上讨论结果，由 $f(x)$ 中的第一项 $P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$ ，可求出一个 m 次多项式 $Q_m(x)$，使得 $y_1^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$ 为方程

$$y'' + py' + qy = P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$$

的特解，其中 k 按 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1 . 由于 $f(x)$ 的第二项 $\bar{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$ 与第一项 $P(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$ 成共轭，所以与 y_1^* 成共轭的函数 $y_2^* = x^k \bar{Q}_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$ 一定是方程

$$y'' + py' + qy = \bar{P}(x)\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

的特解，其中 $\bar{Q}_m(x)$ 是与 $Q_m(x)$ 成共轭的 m 次多项式．于是，方程（7.4.3）有形如

$$y^* = x^k Q_m \mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} + x^k \bar{Q}_m \mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

的特解，即

$$
\begin{aligned}
y^* &= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[Q_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \bar{Q}_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}] \\
&= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[Q_m(\cos \omega x + \mathrm{i} \sin \omega x) + \bar{Q}_m(\cos \omega x - \mathrm{i} \sin \omega x)],
\end{aligned}
$$

由于括号内的两项是互成共轭的，相加后无虚部，所以可以写成实函数的形式，

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos \omega x + R_m^{(2)}(x)\sin \omega x].$$

综上所述，有如下结论：

如果 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程（7.4.3）的特解可设为

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos \omega x + R_m^{(2)}(x)\sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 、 $R_m^{(2)}(x)$ 是两个待定 m 次多项式， $m = \max\{l, n\}$ ， 而

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda + \mathrm{i}\omega \text{ 不是特征方程的根；} \\ 1, & \lambda + \mathrm{i}\omega \text{ 是特征方程的单根.} \end{cases}$$

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程，只是其中的 k 是特征方程中含根 $\lambda + \mathrm{i}\omega$ （或 $\lambda - \mathrm{i}\omega$ ）的重复次数.

例 7.4.7　求微分方程 $y''+2y'-3y=4\sin x$ 的一个特解.

解　原方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2+2r-3=0,$$

它的两个根为 $r_1=-3$，$r_2=1$．而 $\lambda=0$，$\omega=1$，$P_l(x)=0$，$P_n(x)=4$，从而 $m=0$．又因为 $\lambda+\mathrm{i}\omega=\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，所以 k 取 0，因此可设方程的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

则

$$y^{*\prime}=B\cos x-A\sin x,\quad y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x.$$

将 y^*，$y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$ 代入原方程，得

$$(-4A+2B)\cos x+(-2A-4B)\sin x=4\sin x,$$

从而

$$-4A+2B=0,-2A-4B=4,$$

解得 $A=-\dfrac{2}{5}$，$B=-\dfrac{4}{5}$，于是原方程的一个特解为

$$y^*=-\frac{2}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x.$$

例 7.4.8　求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解　原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，它的两个根为 $r_1=\mathrm{i}$，$r_2=-\mathrm{i}$，于是对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

又因为 $\lambda=0$，$\omega=2$，$P_l(x)=x$，$P_n(x)=0$，从而 $m=1$．而 $\lambda+\mathrm{i}\omega=2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，所以 k 取 0，因此应设方程的特解为

$$y^*=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x,$$

则

$$y^{*\prime}=A\cos 2x-2(Ax+B)\sin 2x+C\sin 2x+2(Cx+D)\cos 2x,$$

$$y^{*\prime\prime}=-4A\sin 2x+4C\cos 2x-4(Ax+B)\cos 2x-4(Cx+D)\sin 2x.$$

将 y^*，$y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$ 代入原方程，得

$$(-3Ax-3B+4C)\cos 2x-(3Cx+3D+4A)\sin 2x=x\cos 2x,$$

比较两端同类项的系数，得

$$\begin{cases}-3A=1,\\-3B+4C=0,\\-3C=0,\\-3D-4A=0,\end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{1}{3}$，$B=0$，$C=0$，$D=\dfrac{4}{9}$，于是原方程的一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$$

所给方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x .$$

现将二阶常系数非齐次微分方程的解法归纳如表 7.4 所示。

表 7.4　二阶常系数非齐次微分方程的解法

类型	特征方程	$f(x)$ 的形式	特解的形式
二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$	$r^2 + pr + q = 0$	$f(x) = P_m(x)$	$q \neq 0$ 时，$y^* = Q_m(x)$
			$q = 0$ 而 $p \neq 0$ 时，$y^* = xQ_m(x)$
			$q = p = 0$ 时，$y^* = x^2 Q_m(x)$
		$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$	λ 不是特征根，$y^* = Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
			λ 是单特征根，$y^* = xQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
			λ 是重特征根，$y^* = x^2 Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
		$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ $m = \max\{l, n\}$	$\lambda + \mathrm{i}\omega$ 不是特征根，$y^* = \mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$
			$\lambda + \mathrm{i}\omega$ 是特征根，$y^* = x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

习题 7.4

1．求下列微分方程的通解．

（1）$y'' - 4y' + 3y = 0$；　（2）$y'' + 5y' = 0$；

（3）$y'' - 4y = 0$；　（4）$y'' - y' - 12y = 0$；

（5）$y'' + 4y' + 4y = 0$；　（6）$y'' + 2y' + 2y = 0$；

（7）$y'' + y = 0$；　（8）$y'' - 6y' + 25y = 0$．

2．求下列微分方程的通解．

（1）$y'' - 2y' = 3x + 1$；　（2）$2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$；

（3）$y'' + 3y' + 2y = 3x\mathrm{e}^{-x}$；　（4）$y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$；

（5）$y'' - 2y' = x^2$；　（6）$y'' + y' + y = 3\sin x$；

（7）$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$；　（8）$y'' + y = \cos x + \mathrm{e}^x$．

3．求下列微分方程满足初始条件的特解．

（1）$y'' - 2y' - 3y = 0$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$；

（2）$y'' - 8y' + 16y = 0$，$y(1) = \mathrm{e}^4$，$y'(1) = 0$；

（3）$y'' + 4y' + 8y = 0$，$y(0) = 0$，$y'(0) = 2$；

（4） $y''-4y'+13y=0$， $y(0)=1$， $y'(0)=5$；

（5） $y''+3y'+2y=x$， $y(0)=0$， $y'(0)=1$；

（6） $y''-9y=\mathrm{e}^{3x}$， $y(0)=0$， $y'(0)=0$；

（7） $y''-y=4x\mathrm{e}^{x}$， $y(0)=0$， $y'(0)=1$；

（8） $y''+y=3\sin 2x$， $y(\pi)=1$， $y'(\pi)=-1$.

4．求微分方程 $y''+2y'+2y=0$ 的一条积分曲线方程，使其在点 $(0,1)$ 与直线 $y=2x+1$ 相切.

*7.5　微分方程在经济学中的应用

在自然现象和工程技术中，许多问题的研究往往归结为求解微分方程的问题，特别是在经济学和管理科学中，经常要涉及经济量的变化、增长、速率、边际等内容．通常，根据动态平衡法，即在每一瞬时，遵循净变化率=输入率－输出率模式，可将描述经济量变化形式的 y'、y 和 t 之间建立关系式；或者，根据某个经济法则或某种经济假说，如一项新技术推广的速度与已掌握该项技术的人数以及尚未掌握、有待推广该项技术的人数成正比，t 时刻的产品价格 $P(t)$ 的变化率与 t 时刻该产品的超额需求量 $D\text{-}S$ 成正比，等等，也可建立 y' 与 y 和 t 的关系式，在统一量纲的基础上，可以得到一系列的微分方程．这就是经济学和管理科学的微分方程模型．通过求解方程，我们就可以描述出经济量的变化规律，并作出决策和预测分析．

1．新产品的推广模型

设某种新产品要推向市场，t 时刻的销量为 $x(t)$，由于产品性能良好，每个产品都是一个宣传品，因此，t 时刻产品销售的增长率 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $x(t)$ 成正比．同时，考虑到产品销售存在一定的市场容量 N，统计表明，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与尚未购买该产品的顾客潜在的销售数量 $N-x(t)$ 也成正比，于是有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x)\text{，}\tag{7.5.1}$$

其中常数 $k>0$ 为比例系数．分离变量，积分，可以解得

$$x(t)=\frac{N}{1+C\mathrm{e}^{-kNt}}\text{.}\tag{7.5.2}$$

方程（7.5.1）也称为逻辑斯谛模型，通解表达式（7.5.2）也称为逻辑斯谛曲线．

由
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{CN^2k\mathrm{e}^{-kNt}}{(1+C\mathrm{e}^{-kNt})^2}\text{，}$$

以及
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{Ck^2N^3\mathrm{e}^{-kNt}(C\mathrm{e}^{-kNt}-1)}{(1+C\mathrm{e}^{-kNt})^3},$$
当 $0<x(t^*)<N$ 时，则有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>0$，即销量 $x(t)$ 单调增加．当 $C\mathrm{e}^{-kNt^*}-1=0$，即 $x(t^*)=\frac{N}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=0$；当 $x(t^*)>\frac{N}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}<0$；当 $x(t^*)<\frac{N}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}>0$；即当销量达到最大需求量 N 的一半时，产品最为畅销，当销量不足一半时，销售速度不断增大，当销量超过一半时，销售速度逐渐减少．

国内外许多经济学家的调查表明，许多产品的销售曲线与公式（7.5.2）的曲线十分接近，根据对曲线性状的分析，许多分析家认为，在新产品推出的初期，应采用小批量生产并加强广告宣传的方式，而在产品用户达到 20%到 80%期间，产品应大批量生产；在产品用户超过 80%时，应适时转产，可以达到最大经济效益．

2．价格调整模型

某种商品的价格变化主要取决于市场供求关系．一般情况下，商品供给量 S 是价格 P 的单调递增函数，商品需求量是价格 P 的单调递减函数，为简单起见，设该商品的供给函数与需求函数分别为
$$S(P)=a+bP,\ D(P)=\alpha-\beta P, \tag{7.5.3}$$
其中 a，b，α，β 均为常数，且 $b>0$，$\beta>0$．

当供给量与需求量相等时，由式（7.5.3）可得供求平衡时的价格
$$P_{\mathrm{e}}=\frac{\alpha-a}{\beta+b},$$
并称 P_{e} 为均衡价格．

一般地说，当某种商品供不应求，即 $S<D$ 时，该商品价格要上涨；当供大于求，即 $S>D$ 时，该商品价格要下降．因此，假设 t 时刻的价格 $P(t)$ 的变化率与超额需求量 $D-S$ 成正比，于是有微分方程
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k[D(P)-S(P)],$$
其中 $k>0$，用来反映价格的调整系数．

将式（7.5.3）代入方程，可得
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\lambda(P_{\mathrm{e}}-P), \tag{7.5.4}$$
其中常数 $\lambda=(b+\beta)k>0$，方程（7.5.4）的通解为
$$P(t)=P_{\mathrm{e}}+C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

假设初始价格 $P(0)=P_0$，代入上式，得 $C=P_0-P_{\mathrm{e}}$，于是上述价格调整模型的解为

$$P(t) = P_e + (P_0 - P_e)e^{-\lambda t},$$

由 $\lambda > 0$ 知，$t \to +\infty$ 时，$P(t) \to P_e$. 说明随着时间不断推延，实际价格 $P(t)$ 将逐渐趋近均衡价格 P_e.

3. 人才分配问题模型

每年大学生毕业生中都要有一定比例的人员留在学校充实教师队伍，其余人员将分配到国民经济其他部门从事经济和管理工作. 设 t 年教师人数为 $x_1(t)$，科学技术和管理人员数目为 $x_2(t)$，又设一个教员每年平均培养 α 个毕业生，每年从事教育、科技和经济管理岗位退休、死亡或调出人员的比率为 δ $(0<\delta<1)$，β $(0<\beta<1)$ 表示每年毕业大学生中从事教师职业的学生所占比率，于是有方程

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha\beta x_1 - \delta x_1, \tag{7.5.5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha(1-\beta)x_1 - \delta x_2, \tag{7.5.6}$$

方程（7.5.5）有通解

$$x_1 = C_1 e^{(\alpha\beta-\delta)t}, \tag{7.5.7}$$

若设 $x_1(0) = x_{10}$，则 $C_1 = x_{10}$，于是得特解

$$x_1 = x_{10}e^{(\alpha\beta-\delta)t}. \tag{7.5.8}$$

将式（7.5.8）代入式（7.5.6），方程变为

$$\frac{dx_2}{dt} + \delta x_2 = \alpha(1-\beta)x_{10}e^{(\alpha\beta-\delta)t}, \tag{7.5.9}$$

求解方程（7.5.9），得通解

$$x_2 = C_2e^{-\delta t} + \frac{(1-\beta)x_{10}}{\beta}e^{(\alpha\beta-\delta)t}, \tag{7.5.10}$$

若设 $x_2(0) = x_{20}$，则 $C_2 = x_{20} - \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)x_{10}$，于是得特解

$$x_2 = \left[x_{20} - \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)x_{10}\right]e^{-\delta t} + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)x_{10}e^{(\alpha\beta-\delta)t}. \tag{7.5.11}$$

式（7.5.8）和式（7.5.11）分别表示在初始人数分别为 $x_1(0)$ 和 $x_2(0)$ 的情况下，对应于 β 的取值，在 t 年教师队伍的人数与科技和经济管理人员人数. 从结果看出，如果取 $\beta = 1$. 即毕业生全部留在教育界，则当 $t \to +\infty$ 时，由于 $\alpha > \delta$，必有 $x_1(t) \to +\infty$，而 $x_2(t) \to 0$，说明教师队伍将迅速增加，而科技和经济管理队伍不断萎缩，势必要影响经济发展，反过来也会影响教育的发展. 如果 β 接近于零，则 $x_1(t) \to 0$，同时也导致 $x_2(t) \to 0$，说明如果不保证适当比例的毕业生充实教师队伍，将影响人材的培养，最终会导致两支队伍全面地萎缩. 因此，选择好比率 β，将关系到两支队伍的建设，以及整个国民经济建设的大局.

本章小结

1. 微分方程的基本概念

（1）微分方程：包含未知函数及其导数（或微分）的等式.

（2）微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数.

（3）微分方程的解：满足微分方程的函数.

（4）微分方程的通解：含有与方程的阶数相同的独立任意常数的解.

（5）微分方程的特解：不含任意常数的解.

（6）初始条件：反映初始状态的条件，能通过从通解中确定任意常数而得出特解.

2. 一阶微分方程

（1）可分离变量方程：一般形式为 $f(x)\mathrm{d}x=g(y)\mathrm{d}y$，可采用两边积分的方法求解.

（2）齐次方程：一般形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xu$， $y'=xu'+u$，方程化为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u$，分离变量后再求解.

（3）一阶线性方程：一般形式为 $y'+P(x)y=Q(x)$，有两种解法.

1）公式法： $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$.

2）常数变易法（略）.

（4）伯努利（Bernoulli）方程*.

标准形式为 $y'+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$，

令 $z=y^{1-n}$，可将其化为一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

3. 可降阶的高阶微分方程

（1） $y^{(n)}=f(x)$ 型的解法：通过两边逐次积分 n 次，每次积分加一个任意常数，降为一阶方程后求其通解.

（2） $y''=f(x,y')$ 型的解法：它的特征是不显含 y. 作变量替换，令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，代入后原方程化为一阶微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$.

（3） $y''=f(y,y')$ 型的解法：它的特征是不显含 x. 作变量替换，令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程后化为一阶微分方程 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$.

4. 二阶常系数齐次线性微分方程

（1）二阶常系数齐次线性微分方程.

二阶常系数齐次线性微分方程的标准形式为 $y''+py'+qy=0$（p，q 为任意常数），其求解方法为先求其特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根，再按下面几种情况写出通解.

1）特征方程有两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$，则通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

2）特征方程有两个相等的实根 $r_1=r_2=r$，则通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{rx}+C_2x\mathrm{e}^{rx}=\mathrm{e}^{rx}(C_1+C_2x).$$

3）特征方程有共轭复根 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$（$\beta\neq0$），则通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

通解的形式如表 7.3 所示.

类型	特征方程	通解的形式
二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$	$r^2+pr+q=0$	两不等实根 $r_1\neq r_2$，$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
		两相等实根 $r_1=r_2=r$，$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
		一对共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$，$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

（2）二阶常系数非齐次线性微分方程.

二阶常系数非齐次成线性微分方程的标准形式为

$$y''+py'+qy=f(x).$$

其通解为 $y=y^*+Y$，其中 y^* 为此方程的一个特解，Y 为对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，由（1）可得特解 y^* 的求法：

1）$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 的待定特解可设为 $y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，其中

$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

是一个与 $P_m(x)$ 同次的待定 m 次多项式，b_0，b_1，…，b_m 为待定系数，k 为整数，且

$$k=\begin{cases}0，当\ \lambda\ 不是特征根时；\\1，当\ \lambda\ 是单特征根时；\\2，当\ \lambda\ 是重特征根时.\end{cases}$$

2）$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 的待定特解可设为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$ 是两个 m 次待定多项式，$m=\max\{l,n\}$，而

$$k=\begin{cases}0，\lambda+\mathrm{i}\omega 不是特征方程的根；\\1，\lambda+\mathrm{i}\omega 是特征方程的单根.\end{cases}$$

二阶常系数非齐次微分方程的解法如表 7.4 所示。

<table>
<tr><th>类型</th><th>特征方程</th><th>$f(x)$ 的形式</th><th>特解的形式</th></tr>
<tr><td rowspan="8">二阶常系数非齐次线性微分方程
$y''+py'+qy=f(x)$</td><td rowspan="8">$r^2+pr+q=0$</td><td rowspan="3">$f(x)=P_m(x)$</td><td>$q\neq 0$ 时，$y^*=Q_m(x)$</td></tr>
<tr><td>$q=0$ 而 $p\neq 0$ 时，$y^*=xQ_m(x)$</td></tr>
<tr><td>$q=p=0$ 时，$y^*=x^2Q_m(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$</td><td>$\lambda$ 不是特征根，$y^*=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$</td></tr>
<tr><td>λ 是单特征根，$y^*=xQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$</td></tr>
<tr><td>λ 是重特征根，$y^*=x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x$
$+P_n(x)\sin\omega x]$</td><td>$\lambda+\mathrm{i}\omega$ 不是特征根，
$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x$
$+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$</td></tr>
<tr><td>$\lambda+\mathrm{i}\omega$ 是特征根，
$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x$
$+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$</td></tr>
</table>

复习题 7

1．填空题.

（1）如果微分方程的通解的所有任意常数的值确定后，所得到的微分方程的解称之为________.

（2）方程 $y'''-y''+yy'=x$ 是________阶微分方程.

（3）微分方程 $y'=\mathrm{e}^{x-y}$ 的通解是________.

（4）微分方程 $y'-y=\mathrm{e}^{-x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________.

（5）设 $f(x)$ 是连续可导的函数，且 $f(0)=1$，则满足方程 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=xf(x)-x^2$ 的函数 $f(x)=$________.

（6）微分方程 $2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 的通解是________.

（7）微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+9y=0$ 的通解是________.

（8）微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+29y=0$ 的通解是________.

（9）微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=0$ 的通解是________.

（10）以 $y=C_1xe^x+C_2e^x$ 为通解的二阶常系数齐次线性微分方程为________.

2．单选题.

（1）函数 $y=C_1e^{2x+C_2}$（其中 C_1，C_2 是任意常数）是微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$ 的（　　）.

A．通解　　B．特解

C．不是解　　D．是解，但不是通解，也不是特解

（2）下列微分方程中为齐次方程的是（　　）.

A．$\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$　　B．$(x-2y+1)dx=(2x-y+1)dy$

C．$\dfrac{x}{1+y}dx-\dfrac{y}{1+x}dy=0$　　D．$y'=\dfrac{1}{2x-y}$

（3）微分方程 $ydx+(y^2x-e^y)dy=0$ 是（　　）.

A．伯努利方程　　B．可化为一阶线性的微分方程

C．全微分方程　　D．齐次方程

（4）若 $y_2(x)$ 是线性非齐次方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，$y_1(x)$ 是对应的齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，则下列函数中也是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解的是（　　）.

A．$y=Cy_1(x)+y_2(x)$　　B．$y=y_1(x)+Cy_2(x)$

C．$y=C[y_1(x)+y_2(x)]$　　D．$y=Cy_1(x)-y_2(x)$

（5）若 $y_1(x)$ 是线性非齐次方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的一个特解，则该方程的通解是（　　）.

A．$y=y_1(x)+e^{-\int p(x)dx}$　　B．$y=y_1(x)+Ce^{-\int p(x)dx}$

C．$y=y_1(x)+e^{-\int p(x)dx}+C$　　D．$y=y_1(x)+Ce^{\int p(x)dx}$

（6）$xy''=(1+2x^2)y'$ 的通解是（　　）.

A．$y=C_1e^{x^2}$　　B．$y=C_1e^{x^2}+C_2x$

C．$y=C_1e^{x^2}+C_2$　　D．$y=C_1xe^{x^2}+C_2$

（7）微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的特解形式（其中 a，b 为常数）是（　　）.

A．$ae^{2x}+(bx+c)$　　B．$(ax+b)e^{2x}$

C．$x^2(ax+b)e^{2x}$　　D．$x(ax+b)e^{2x}$

（8）设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解且 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　　）.

A．取得极大值　　B．取得极小值

C．某邻域内单调增加　　D．某邻域内单调减少

（9）微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（其中 a，b，c，d 为常数）（　　）.

A．$(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$　　B．$(ax^2+bx)\cos 2x$

C．$a\cos 2x+b\sin 2x$　　D．$x(ax+b)(\cos 2x+\sin 2x)$

（10）若 y_1，y_2 是某个二阶线性齐次微分方程的解，则 $C_1y_1+C_2y_2$（C_1，C_2 是任意常数）必然是该方程的（　　）.

A．通解　　B．特解

C．解　　D．全部解

3．计算题.

（1）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=xe^{2x-3y}$ 的通解.

（2）求微分方程 $y'\cos y+\sin(x-y)=\sin(x+y)$ 的通解.

（3）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\ln(x^y)$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=2$ 的特解.

（4）求微分方程 $yy'+e^{2x+y^2}=0$ 满足 $y(0)=0$ 的特解.

（5）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ 的通解.

（6）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{(x+y)^2}$ 满足 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=1$ 的特解.

（7）求微分方程 $3y'+y=\dfrac{1}{y^2}$ 的通解.

（8）求微分方程 $e^{2x}y'''=1$ 的通解.

（9）求微分方程 $2x''(t)+x'(t)+3x(t)=0$ 的通解.

（10）求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 的积分曲线方程，使其在点 $(0,2)$ 与直线 $2x-2y+9=0$ 相切.

（11）求通过点 $(1,2)$ 的曲线方程，使此曲线在 $[1,x]$ 上所形成的曲边梯形面积的值等于此曲线段终点的横坐标 x 与纵坐标 y 乘积的 2 倍减去 4.

（12）设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2e^x$.

1）求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

2）求出 $F(x)$ 的表达式.

（13）求微分方程 $x\,dy+(x-2y)\,dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

自测题 7

1．填空题.

（1）微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解 $y=$________.

（2）微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解 $y=$________.

（3）微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ ，$y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 的特解是________.

（4）以 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）为通解的二阶常系数线性微分方程为________.

（5）微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解是________.

2．单选题.

（1）微分方程 $y^2\,\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$ 是（　　）.

A．齐次方程　　　　B．线性方程

C．可分离变量方程　　　　D．全微分方程

（2）设 y_1，y_2，…，y_n 是 $y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=0$ 的 n 个特解，C_1，C_2，…，C_n 为任意常数，则 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$（　　）.

A．不是方程的通解

B．是方程的通解

C．当 y_1，y_2，…，y_n 线性无关时，是通解

D．当 y_1，y_2，…，y_n 线性相关时，是通解

（3）设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的解，并且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$（　　）.

A．在 x_0 的某邻域内单调增加

B．在 x_0 的某邻域内单调减少

C．在 x_0 处取得极小值

D．在 x_0 处取得极大值

（4）微分方程 $y''-6y'+8y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解应具有（　　）的形式（其中 a，b 为常数）.

A．$a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{2x}$　　　　B．$a\mathrm{e}^{x}+bx\mathrm{e}^{2x}$

C．$ax\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{2x}$　　　　D．$ax\mathrm{e}^{x}+bx\mathrm{e}^{2x}$

（5）已知二阶线性微分方程的三个特解是 $y_1=\mathrm{e}^{3x}$，$y_2=\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-x}$，则该方程是（　　）.

A．$y''-4y'+4y=\mathrm{e}^{3x}$　　　　B．$y''-y'-2y=4\mathrm{e}^{3x}$

C．$y''-2y'-3y=2\mathrm{e}^{2x}$　　　　D．$y''-5y'+6y=-\mathrm{e}^{-x}$

3．计算题.

（1）求方程 $(y^2-3x^2)\,\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}x=0$ 满足 $y\big|_{x=0}=1$ 时的特解.

（2）求 $y'\cos x+y\sin x=\cos^3 x$ 满足 $y(0)=1$ 的解.

（3）求 $(1+y)\,\mathrm{d}x+(x+y^2+y^3)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

（4）求微分方程 $xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}\ (0<x<+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=1$ 的解.

（5）设 $f(0)=0$，$f'(x)=\int_0^x[f(t)+tf'(t)]\,\mathrm{d}t+x$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(x)$.

（6）设 $y=y(x)$ 满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=-4, \end{cases}$$

求广义积分$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$.

（7）求方程$y''-y=\sin x$的通解.

（8）满足方程$y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$的哪一条积分曲线通过点$(1,\mathrm{e}^{-1})$，且在该点处有平行于$x$轴的切线.

（9）设$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$为连续函数，求$f(x)$.

（10）在第一象限中有一曲线通过原点O与点$(1,2)$，点$P(x,y)$在曲线上，由曲线$\overset{\frown}{OP}$、x轴和平行于y轴并过点P的直线所围成的曲边三角形的面积，等于以OP为对角线、边平行于坐标轴的矩形的面积的 1/3，求此曲线的方程.