第 2 章　导数与微分

2.1　内 容 提 要

2.1.1　导数的概念

1．导数的概念

（1）导数的概念

定义 2.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$．若极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

注意：若记 $x=x_0+\Delta x$，由于当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，所以导数 $f'(x_0)$ 的定义也可表示为 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

（2）左、右导数

既然导数是增量比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，那么下面两个极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}；\quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

分别叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

定理 2.1.1　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右导数都存在且相等.

若 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导．此时，对于每一个 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$，从而构成了一个新的函数，称为 $f(x)$ 的导函数，记作 y', $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}$．通常导函数也简称为导数．

注意：求导数一般分为以下三步：

① 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

② 计算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

③ 求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$．

2. 导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\varphi\to\theta}\tan\varphi=\tan\theta=k$，过曲线上一点且垂直于该点处切线的直线，称为曲线在该点处的法线．

根据导数的几何意义，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$；法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$（$f'(x_0)\neq 0$）．

注意：若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线的方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$．

3. 可导与连续的关系

定理 2.1.2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意：上述定理的逆命题不一定成立，即在某点连续的函数，在该点未必可导.

2.1.2 导数的运算

1. 函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2.2.1 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处均可导，则它们的和、差、积、商（当分母不为零时）在点 x 处也可导，且有以下法则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$；注意：$(Cu)'=Cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv')}{v^2}$；注意：$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$（$v\neq 0$）.

法则（1），（2）均可推广到有限多个可导函数的情形：

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 在点 x 处均可导，则

$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'$．

$$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w' =(u'v+uv')w+uvw'$$
$$=u'vw+uv'w+uvw'．$$

2. 复合函数的导数

定理 2.2.2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的 u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

3. 反函数的求导法则

定理 2.2.3 如果单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间内可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内可导，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

4. 隐函数和由参数方程确定的函数的导数

（1）隐函数的导数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$．求隐函数的导数，可根据复合函数的链导法，直接由方程求得它所确定的隐函数的导数.

注意：对数求导法的适用条件:

① 幂指函数 $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$（$f(x)>0$）;

② 类似 $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1)(3x-4)}{(x+1)(x^2+3)}}$，连乘除形式的函数求导.

（2）由参数方程确定的函数的导数

变量 x 与 y 之间的函数关系在一定条件下可由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定，其中 t 是参数，根据复合函数和反函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

5. 高阶导数

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数．二阶导数有明显的物理意义，考虑物体的直线运动，设位移函数为 $s=s(t)$，则速度 $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，而加速度 a 是速度对时间的导数，是位移函数对时间的二阶导数，即 $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$.

2.1.3 微分

1. 微分的概念

定义 2.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可

微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$，即 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$.

2. 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.1 所示．过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $M(x,y)$ 处作切线 MT，设 MT 的倾角为 α，则 $\tan\alpha=f'(x)$．当自变量 x 有增量 Δx 时，切线 MT 的纵坐标相应地有增量 $QP=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x=\mathrm{d}y$．因此，微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 几何上表示当 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M(x,y)$ 处的切线的纵坐标的增量．用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 就是用点 M 处的切线纵坐标的增量 QP 近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的增量 QN，并且 $|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.

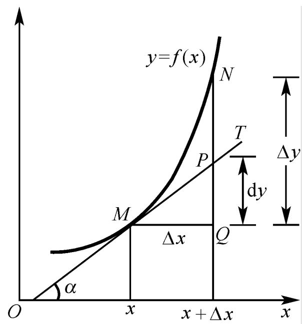

图 2.1

3. 微分法则

（1）函数的和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u(x)=u$，$v(x)=v$ 均可微，则：

$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$；$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$；

$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$（$C$ 为常数）；$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$（$v\neq 0$）.

（2）复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$\mathrm{d}y=\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x$，而 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，于是 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$，可见不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式，这个性质称为一阶微分形式不变性.

4. 微分在近似计算中的应用

由微分的定义可知，当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$，或写成 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，记 $x_0+\Delta x=x$，则上式又可写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，有 $f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$.

2.2 典型例题解析

例 1 设 $y=\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 所给问题为复合函数求导，$y=\sin u$，$u=\mathrm{e}^v$，$v=\dfrac{1}{\omega}$，$\omega=x^2$，由链式法则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}=-2x\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)=-\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right).$$

例 2 求由方程 $xy^2-\mathrm{e}^{xy}+2=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 所给问题为隐函数求导问题，将所给式子两端关于 x 求导，可得

$$y^2+2xyy'-\mathrm{e}^{xy}(y+xy')=0\text{，即 }y'=\frac{y(\mathrm{e}^{xy}-y)}{x(2y-\mathrm{e}^{xy})}\quad（x(2y-\mathrm{e}^{xy})\neq 0）.$$

例 3 设 $y=\dfrac{(x+1)^2(x+2)^3}{\sqrt{x+3}(x+4)}$，求 y'.

解 所给问题属于连乘除形式的函数求导问题，适用于对数求导法．由对数性质，有

$$\ln y=2\ln(x+1)+3\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+3)-\ln(x+4).$$

将上式两端分别关于 x 求导，可得 $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{2(x+3)}-\dfrac{1}{x+4}$，即

$$y'=\frac{(x+1)^2(x+2)^3}{\sqrt{x+3}(x+4)}\left[\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2(x+3)}-\frac{1}{x+4}\right].$$

例 4 讨论 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, & 0<x<1\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 由题设可知 $x=0$ 为 $f(x)$ 的分界点，且在分界点的两侧 $f(x)$ 的表达式不一致．应该利用左连续、右连续考察 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性，利用左导数、右导数考察 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的可导性.

由于
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=\ln 1=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，可知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

又由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$（利用 $\ln(1+x)\sim x$），

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=1,$$

可知 $f'_+(0)=f'_-(0)$，因此 $f'(0)=1$.

综上所述，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续而且可导.

2.3　习题选解

习题 2.1

1．一质点以初速度 v_0 向上作抛物运动，其运动方程为

$$s=s(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad（v_0>2，且为常数）.$$

（1）求质点在 t 时刻的瞬时速度；

（2）何时质点的速度为 0；

（3）求质点回到出发点时的速度.

解　（1）质点在 t 时刻的瞬时速度 $v(t)=s'(t)=v_0-gt$；

（2）当 $v(t)=0$ 时，$t=\dfrac{v_0}{g}$；

（3）质点回到出发点时的速度为 $-v_0$.

2．求解下列问题.

（1）求圆的面积 S 相对于半径变量 r 的变化率；

（2）求圆的面积为 1 时，周长变量 l 相对于半径变量 r 的变化率；

（3）求圆的面积为 1 时，面积变量 S 相对于周长变量 l 的变化率.

解　（1）圆的面积 S 与半径变量 r 的关系为 $S=\pi r^2$，圆的面积 S 相对于半径变量 r 的变化率为 $S'=2\pi r$；

（2）周长变量 l 与半径变量 r 的关系为 $l=2\pi r$，周长变量 l 相对于半径变量 r 的变化率为 $l'=2\pi$；

（3）面积变量 S 与周长变量 l 的关系为 $S=\dfrac{l^2}{4\pi}$. 当圆的面积为 1 时，周长 $l=2\sqrt{\pi}$，所以，当圆的面积为 1 时，面积变量 S 相对于周长变量 l 的变化率 $S'(2\sqrt{\pi})=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3．求下列函数在指定点的导数：

（1）$y=\cos x,\ x=\dfrac{\pi}{2}$；　　　　（2）$y=\ln x,\ x=5$.

解 （1） $\Delta y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\cos\frac{\pi}{2}=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1\ .$$

（2） $\Delta y=\ln(5+\Delta x)-\ln 5=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{5}\right)$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{5}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{5}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{5}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{5}\right)^{\frac{5}{\Delta x}}=\frac{1}{5}\ .$$

4．求下列函数的导数：

（1） $y=\log_3 x$； （2） $y=\dfrac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$；

（3） $y=\sqrt[3]{x^2}$； （4） $y=\cos x$.

解 （1） $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$；

（2） $y=x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{6}}$，所以 $y'=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$；

（3） $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$， $y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$；

（4） $y'=-\sin x$.

5．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续；

（2）若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不可导；

（4）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必不连续.

解 （1）正确，因为由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，必有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

（2）不正确，例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 连续，但不可导.

（3）正确，因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y\neq 0$ ，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 一定不存在.

（4）不正确，由（2）的结论即可说明.

6．下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按导数定义观察下列极限：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{\Delta x}$．

解（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$；

（2）
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]\\&=2f'(x_0).\end{aligned}$$

7．求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程与法线方程．

解 $y'|_{x=1}=-\left.\dfrac{1}{x^2}\right|_{x=1}=-1$；所以切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$；法线的斜率与切线斜率是互为负倒数关系，所以法线方程为 $y-1=x-1$，即 $y-x=0$．

8．求曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点(0,1)处的切线方程与法线方程．

解 $y'|_{x=0}=\left.\mathrm{e}^x\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $x-y+1=0$，法线的斜率与切线斜率是互为负倒数关系，所以，法线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $x+y-1=0$．

9．问 a 、b 取何值时，才能使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$ 在 $x=x_0$ 处连续且可导？

解 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}x^2=x_0^2=f(x_0)$，所以，要 $f(x)$ 在点 x_0 连续，只要 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=x_0^2$，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}(ax+b)=x_0^2$，于是得 $ax_0+b=x_0^2$；$f(x)$ 在点 x_0 可导，即左右导数相等，$f'_-(x_0)=2x_0$，$f'_+(x_0)=a$，所以 $a=2x_0$，再由 $ax_0+b=x_0^2$ 式得 $b=-x_0^2$．故当 $a=2x_0$，$b=-x_0^2$ 时，函数在 $x=x_0$ 处连续且可导．

10．讨论下列函数在 $x=0$ 点是否连续、是否可导？

（1）$y=x|x|$；（2）$y=|\sin x|$；

（3）$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$（4）$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解（1）$y=f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续．

$f'_-(0)=0$，$f'_+(0)=0$，即左右导数相等，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导．

（2）$y=f(x)=|\sin x|=\begin{cases}-\sin x, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0,\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sin x\right)=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

$f'_-(0)=\left(-\cos x\right)\big|_{x=0}=-1$，$f'_+(0)=\cos x\big|_{x=0}=1$，即左右导数不相等，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

（3）$y=f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

（4）$y=f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，上式极限不存在，所以此函数在 $x=0$ 点不可导.

11．设 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x-1, & x<0, \\ x+a, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ b\sin(x-1)+1, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 求 a ,b，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处可导.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a$，$f(0)=a$，
因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$，即 $a=0$．$f'_-(1)=1\big|_{x=1}=1$，$f'_+(1)=b\cos(x-1)\big|_{x=1}=b$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而 $f'_-(0)=f'_+(0)$，即 $b=1$．

12．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-1$．（1）求 $f(0)$；（2）问 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$，又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，从而 $f(0)=1$．

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f'(0)=-1$．

13．设 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续，求 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 $x=0$ 点的导数．

解 因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin 2x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}g(x)=2g(0)，$$

即 $f'(0)=2g(0)$．

14．设 $f(0)=1$，$g(1)=2$，$f'(0)=-1$，$g'(1)=-2$，求：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-f(x)}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}g(x)-2}{x-1}$．

解 （1）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-f(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-f(0)+f(0)-f(x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-f'(0)=1；\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x f(x)-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\left[f(x)-f(0)\right]+2^x f(0)-f(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\left[f(x)-f(0)\right]}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(0)\left(2^x-1\right)}{x}=-1+\ln 2；\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}g(x)-2}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}g(x)-\sqrt{x}g(1)+\sqrt{x}g(1)-g(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}g(x)-\sqrt{x}g(1)+\sqrt{x}g(1)-g(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\left[g(x)-g(1)\right]}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)g(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\left[g(x)-g(1)\right]}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)g(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left[g(x)-g(1)\right]}{x-1}+g(1)\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}\\&=1\cdot g'(1)+2\cdot\frac{1}{2}=-1．\end{aligned}$$

15．设 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{1-x}$．

解 令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(\ln x)-1}{1-x}&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{1-\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{1-\mathrm{e}^t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{1-\mathrm{e}^t}\\&=f'(0)\cdot(-1)=1．\end{aligned}$$

习题 2.2

1．求下列函数的导数：

（1）$y = xa^x + 7\mathrm{e}^x$；

（2）$y = 3x\tan x + \sec x - 4$；

（3）$y = x^3 + 3x\sin x$；

（4）$y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x} + \dfrac{1}{x}$；

（5）$y = x^2 \ln x$；

（6）$y = 3\mathrm{e}^x \cos x$；

（7）$y = \dfrac{\ln x}{x}$；

（8）$y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \ln 3$；

（9）$y = x^2 \ln x \cos x$；

（10）$y = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$；

（11）$y = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$；

（12）$y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x+2}$；

（13）$y = x^2 \log_3 x$；

（14）$y = x\arctan x$；

（15）$y = 2^x \arcsin x - 3\sqrt[3]{x^2}$；

（16）$y = \arcsin x + \arccos x$．

解　（1）$y' = a^x + xa^x \ln a + 7\mathrm{e}^x = a^x(1 + x\ln a) + 7\mathrm{e}^x$．

（2）$y' = 3\tan x + 3x\sec^2 x + \sec x \tan x$．

（3）$y' = 3x^2 + 3\sin x + 3x\cos x = 3(x^2 + \sin x + x\cos x)$．

（4）$y' = \dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$．

（5）$y' = 2x\ln x + x^2 \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$．

（6）$y' = 3\mathrm{e}^x \cos x - 3\mathrm{e}^x \sin x = 3\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$．

（7）$y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$．

（8）$y' = \dfrac{\mathrm{e}^x x^2 - 2x\mathrm{e}^x}{x^4} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-2)}{x^3}$．

（9）$y' = 2x\ln x\cos x + x^2\dfrac{1}{x}\cos x - x^2 \ln x \sin x = 2x\ln x\cos x + x\cos x - x^2\ln x\sin x$．

（10）$y' = \dfrac{\cos x(1+\cos x) + \sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1+\sin x+\cos x}{(1+\cos x)^2}$．

（11）$y' = \dfrac{(2x-1)\left(x+\sqrt{x}\right) - \left(x^2 - x\right)\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$．

（12）$y' = \dfrac{(4x-1)(x+2) - \left(2x^2 - x + 1\right)}{(x+2)^2} = 2 - \dfrac{11}{(x+2)^2}$．

（13） $y' = 2x\log_3 x + x^2 \dfrac{1}{x\ln 3} = 2x\log_3 x + \dfrac{x}{\ln 3}$.

（14） $y' = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$.

（15） $y' = 2^x \ln 2 \arcsin x + \dfrac{2^x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

（16） $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

2．设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

（1） $y = [f(x)]^2$ ；（2） $y = \mathrm{e}^{f(x)}$ ；

（3） $y = \dfrac{1}{1+[f(x)]^2}$ ；（4） $y = \arctan[f(x)]$ ；

（5） $y = \ln[1+f^2(x)]$ ；（6） $y = f\left(\sqrt{x}+1\right)$.

解 （1） $y' = 2f(x)f'(x)$.

（2） $y' = \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$.

（3） $y' = \dfrac{-2f(x)f'(x)}{[1+f^2(x)]^2}$.

（4） $y' = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$.

（5） $y' = \dfrac{2f(x)f'(x)}{1+[f(x)]^2}$.

（6） $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} f'\left(\sqrt{x}+1\right)$.

3．求下列函数的导数：

（1） $y = (x^2 - x)^5$ ；（2） $y = 2\sin(3x+6)$ ；

（3） $y = \cos^3 x$ ；（4） $y = \ln(\tan x)$ ；

（5） $y = \sqrt{1+\ln x}$ ；（6） $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ ；

（7） $y = \left(x - 2\sqrt{x}\right)^4$ ；（8） $y = x\mathrm{e}^{-2x}$ ；

（9） $y = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$ ；（10） $y = \ln(2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x})$ ；

（11） $y = \left(\sin(\sqrt{1-2x}\right)^2$ ；（12） $y = 2^{\sqrt{x+1}} - \ln(\sin x)$ ；

（13） $y = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ （ $a > 0$ ）；

（14） $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ （ $a > 0$ ）；

（15） $y = \left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$ ；（16） $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$ ；

（17） $y = \ln\ln\ln x$ ；（18） $y = \mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}$.

解 （1） $y'=5(x^2-x)^4(2x-1)$.

（2） $y'=2\cos(3x+6)\cdot 3=6\cos(3x+6)$.

（3） $y'=3\cos^2 x(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$.

（4） $y'=\cot x\cdot\sec^2 x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$.

（5） $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$.

（6） $$y'=\frac{-2\sin 2x\left(\sin x+\cos x\right)-\cos 2x\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{-4\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{-4\sin x\cos x-\left(\cos x-\sin x\right)^2}{\left(\sin x+\cos x\right)}$$

$$=-\sin x-\cos x.$$

（7） $y'=4\left(x-2\sqrt{x}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

（8） $y'=\mathrm{e}^{-2x}-2x\mathrm{e}^{-2x}=(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$.

（9） $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\dfrac{\left(x-1\right)-\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)^2}=-\dfrac{1}{x^2+1}$.

（10） $y'=-\dfrac{2^{-x}\ln 2+3^{-x}\ln 3+4^{-x}\ln 4}{2^{-x}+3^{-x}+4^{-x}}$.

（11） $y'=2\sin\sqrt{1-2x}\cos\sqrt{1-2x}\dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\sin\left(2\sqrt{1-2x}\right)$.

（12） $y'=2^{\sqrt{x+1}}\ln 2\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}2^{\sqrt{x+1}}\ln 2-\cot x$.

（13） $$y'=\sqrt{x^2-a^2}+\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}-a^2\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}+\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=2\sqrt{x^2-a^2}\ .$$

（14） $y'=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

（15） $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}}=\dfrac{2\arcsin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$.

（16） $y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$.

（17） $y'=\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

（18） $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

4．用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；

（2） $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$；

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

（4） $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$

（5） $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$；

（6） $y=\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

解 （1）将函数 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 两边取自然对数，即 $\ln y=x\ln\dfrac{x}{1+x}$ ，整理得 $\ln y=x\ln x-x\ln(1+x)$ ，两边对 x 求导， $\dfrac{1}{y}y'=\ln x+\dfrac{x}{x}-\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ ，因此 $y'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$.

（2）将函数两边取自然对数，得 $\ln y=\dfrac{1}{5}[\ln(x-5)-\dfrac{1}{5}\ln(x^2+2)]$，两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{5}\dfrac{2x}{x^2+2}\right)$，所以 $y'=\dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{5(x^2+2)}\right)$.

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ ，将函数两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1),$$

两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+2}+4\dfrac{-1}{3-x}-5\dfrac{1}{x+1}$，所以

$$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right).$$

（4） $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ ，将函数两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln\sin x+\frac{1}{2}\ln\left(1-\mathrm{e}^x\right)\right),$$

两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{-\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)}\right)$.

所以 $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{1}{x}+\cot x-\dfrac{e^x}{2(1-e^x)}\right)$.

（5）$y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$，

将函数两边取自然对数，得 $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)-\dfrac{1}{3}\ln\left(x^3-2\right)$，

两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{x^2+2x}-\dfrac{1}{3}\dfrac{3x^2}{x^3-2}$，所以 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^3-2}}\left[\dfrac{x+1}{x(x+2)}-\dfrac{x^2}{x^3-2}\right]$.

（6）$y=\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$，

将函数两边取自然对数，得 $\ln y=x\ln\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)$，整理得 $\ln y=x\ln(2x-1)-x\ln 2x$，

两边对 x 求导，得 $\dfrac{1}{y}y'=\ln(2x-1)+x\dfrac{2}{2x-1}-\ln 2x-x\dfrac{2}{2x}$，

所以 $y'=\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)+\dfrac{1}{2x-1}\right]$.

5．已知 $y=x^2+a$ 与 $y=b\ln(1+2x)$ 在 $x=1$ 点相切（两曲线在 (x_0,y_0) 处相切是指它们在 (x_0,y_0) 处有共同切线），求 a,b 的值.

解 根据题意得 $y\big|_{x=1}=\left(x^2+a\right)\Big|_{x=1}=y\big|_{x=1}=b\ln(1+2x)\big|_{x=1}$，

$$\begin{cases} y'\big|_{x=1}=(2x)\big|_{x=1}=2, \\ y'\big|_{x=1}=\dfrac{2b}{1+2x}\Big|_{x=1}=\dfrac{2b}{3}, \end{cases}\text{解方程组得}\begin{cases} a=3\ln 3-1, \\ b=3. \end{cases}$$

6．略.

7．求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

（1）$x^2-y^2=xy$；（2）$x\cos y=\sin(x+y)$；

（3）$xy=e^{x+y}$；（4）$y=1-xe^y$.

解 （1）两边对 x 求导得 $2x-2yy'=y+xy'$，解出 y' 得 $y'=\dfrac{2x-y}{x+2y}$.

（2）两边对 x 求导，$\cos y-x\sin y\cdot y'=\cos(x+y)(1+y')$，解出 y' 得

$$y'=\frac{\cos y-\cos(x+y)}{x\sin y+\cos(x+y)}.$$

（3）两边对 x 求导，$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$，解出 y'，得 $y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$.

（4）两边对 x 求导，$y'=-e^y-xe^yy'$，解出 y'，得 $y'=-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$.

8．参数方程$\begin{cases} x = e^t(1-\cos t), \\ y = e^t(1+\sin t), \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$．

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{e}^t(1+\sin t) + \mathrm{e}^t \cos t}{\mathrm{e}^t(1-\cos t) + \mathrm{e}^t \sin t} = \frac{1+\sin t + \cos t}{1+\sin t - \cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{e}^t(1-\cos t) + \mathrm{e}^t \sin t}{\mathrm{e}^t(1+\sin t) + \mathrm{e}^t \cos t} = \frac{1+\sin t - \cos t}{1+\sin t + \cos t}.$$

9．求下列函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$．

（1）$y = x\cos x$；　　（2）$y = \mathrm{e}^{2x-1}$．

（3）$y = (1+x^2)\arctan x$；　　（4）$y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$；

（5）$y = x\mathrm{e}^{x^2}$；　　（6）$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$．

解 （1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x - x\sin x)$$
$$= -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x.$$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{2x-1}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 4\mathrm{e}^{2x-1}$．

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\arctan x + (1+x^2)\dfrac{1}{1+x^2} = 2x\arctan x + 1$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x\arctan x + 1) = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2}\right) = \frac{\left(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right)x^2 - 2x\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right)}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

（5）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\mathrm{e}^{x^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\mathrm{e}^{x^2}) = 2x\mathrm{e}^{x^2} + 4x\mathrm{e}^{x^2} + 4x^3\mathrm{e}^{x^2} = 2x\mathrm{e}^{x^2}(3 + 2x^2).$$

（6）$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

10．略.

11．求 $y=3^{-x}$ 的 n 阶导数.

解　$y'=-3^{-x}\ln 3$， $y''=3^{-x}\left(-\ln 3\right)^2$， $y'''=3^{-x}(-\ln 3)^3$， $y^{(n)}=3^{-x}(-\ln 3)^n$.

习题 2.3

1．已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 时，当 Δx 分别等于 $1, 0.1, 0.01$ 时的 Δy , $\mathrm{d}y$.

解　$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)$， $\mathrm{d}y=f'(2)\Delta x$，

当 $\Delta x=1$ 时， $\Delta y=18,\ \mathrm{d}y=11$；当 $\Delta x=0.1$ 时， $\Delta y=1.161,\ \mathrm{d}y=1.1$；

当 $\Delta x=0.01$ 时， $\Delta y=0.110601,\ \mathrm{d}y=0.11$.

2．求下列函数的微分：

（1） $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　　（2） $y=x\sin 2x$；

（3） $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　（4） $y=\ln^2(1-x)$；

（5） $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$；　　（6） $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$；

（7） $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln x$；　　（8） $y=\sqrt{\arcsin\sqrt{x}}$；

（9） $y=\tan^2(1+2x^2)$；　　（10） $y=\sqrt{\cos 3x}+\ln\tan\dfrac{x}{2}$.

解　（1） $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)\mathrm{d}x$；

（2） $\mathrm{d}y=(\sin 2x+2x\cos 2x)\mathrm{d}x$；

（3） $\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\mathrm{d}x=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$；

（4） $\mathrm{d}y=-2\ln(1-x)\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x$；

（5） $\mathrm{d}y=\left(2x\mathrm{e}^{2x}+2x^2\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=2x(1+x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；

（6） $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}\left(\sin(3-x)-\cos(3-x)\right)\mathrm{d}x$；

（7） $\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\left(1-\dfrac{\ln x}{2}\right)\mathrm{d}x$；

（8） $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin\sqrt{x}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}\sqrt{\arcsin\sqrt{x}}}$；

（9） $\mathrm{d}y=2\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x\,\mathrm{d}x=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x$；

（10）$\mathrm{d}y=\left(\frac{3\sin 3x}{-2\sqrt{\cos 3x}}+\cot\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}\right)\mathrm{d}x$.

3．在括号内填入适当的函数，使等式成立.

（1）$\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　）；

（2）$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　）；

（3）$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　）；

（4）$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　）.

解　（1）$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；（2）$\frac{1}{2}x^2+C$；（3）$2\sqrt{x}+C$；（4）$\arcsin x+C$.

4．求下列微分关系式中的未知函数 $f(x)$：

（1）$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$；

（2）$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}f(x)$；

（3）$\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$；

（4）$x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$；

（5）$\ln x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)-\mathrm{d}f(x)$；

（6）$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}f(x)$；

（7）$\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}f(x)$；

（8）$\sqrt{x+1}\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$；

（9）$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}f(x)$；

（10）$\tan x\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$.

解　（1）$f(x)=\frac{x^2}{2}+C$；（2）$f(x)=\ln|x|+C$；（3）$f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$；

（4）$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$；（5）$f(x)=x+C$；（6）$f(x)=\arctan x+C$；

（7）$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；（8）$f(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$；

（9）$f(x)=\arcsin x+C=-\arccos x+C_1$；（10）$f(x)=\ln|\sec x|+C$.

5．设 $y=y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y^2)=x+y-1$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}$.

解　方程两边对 x 求导，$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=1+y'$，解方程得 $y'=\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2y}$，所以 $\mathrm{d}y=\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2y}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}x$.

6．利用微分求近似值：

（1）$\sqrt[6]{65}$；

（2）$\lg 11$.

解　（1）由近似公式，当 $|x|$ 很小时，$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$，

则
$$\sqrt[6]{1+64}=\sqrt[6]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)}=2\sqrt[6]{1+\frac{1}{64}}\approx 2\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\right)$$
$$=2\times 1.0026=2.0052.$$

（2）由 $\lg(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 10}$，且当 $|x|$ 很小时，$\ln(1+x)\approx x$，所以

$$\lg 11=\lg\left[10\left(1+\frac{1}{10}\right)\right]=\lg 10+\lg\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{10}\right)}{\ln 10}\approx 1+\frac{1}{10\times 2.3034}=1.0434\text{.}$$

复习题 2

1．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点处必无切线；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $y=f(x)$ 必处处可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必可导；

（4）若 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导.

解　（1）不正确，因为曲线可能存在垂直于 x 轴的切线，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$.

（2）由（1）知不正确.

（3）不正确．如 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 可导，但 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 不可导.

实际上，$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ -\sin x, & x<0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的右导数为 1，左导数为 -1.

（4）不正确，例如，$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $|f(x)|$ 在 $x=0$ 可导，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

2．求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 是否存在：

（1）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$　　（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　（1）$f'_-(0)=\cos x\big|_{x=0}=1$；$f'_+(0)=\dfrac{1}{1+x}\bigg|_{x=0}=1$；所以　$f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=1$.

（2）$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

$f'_-(0)=1\neq f'_+(0)=0$，所以 $f'(0)$ 不存在.

3．求下列函数的导数：

（1） $y=\dfrac{2\sec x}{1+x^2}$；（2） $y=\dfrac{\arctan x}{x}+\arccos x$；

（3） $y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$；（4） $y=x(\sin x+1)\csc x$；

（5） $y=\cot x\cdot(1+\cos x)$；（6） $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$；

（7） $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；（8） $y=\arccos\sqrt{1-3x}$；

（9） $y=\tan^3(1-2x)$．

解　（1） $y'=2\cdot\left(\dfrac{\sec x\cdot\tan x\cdot(1+x^2)-2x\cdot\sec x}{(1+x^2)^2}\right)=\dfrac{2\sec x\left[(1+x^2)\tan x-2x\right]}{(1+x^2)^2}$；

（2） $y'=\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot x-\arctan x}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（3） $y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}=1+\dfrac{x^2}{1+x}$， $y'=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$；

（4） $y'=(\sin x+1)\csc x+x\cos x\csc x-x(\sin x+1)\csc x\cot x$

$=x(\sin x+1)\csc x\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\cos x}{\sin x+1}-\cot x\right)$；

（5） $y'=-\csc^2 x(1+\cos x)+\cot x(-\sin x)=-\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}-\cos x$；

（6） $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{-2\sqrt{x}}{1-x}$， $y'=(-2)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1-x)+\sqrt{x}}{(1-x)^2}=-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(1-x)^2}$；

（7） $y'=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$；

（8） $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-3x)}}\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}\sqrt{1-3x}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x(1-3x)}}$；

（9） $y'=-6\tan^2(1-2x)\sec^2(1-2x)$．

4．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1） $y\mathrm{e}^x+\ln y=1$；（2） $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$．

解　（1）两边对 x 求导得： $y'\mathrm{e}^x+y\mathrm{e}^x+\dfrac{y'}{y}=0$，从中解出 y'，

即得 $y'=-\dfrac{y\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{y}}=-\dfrac{y^2\mathrm{e}^x}{1+y\mathrm{e}^x}$．

（2）两边对 x 求导得 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}$，解出 y' 得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$．

5．求函数 $y=x^2\ln x$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\ln x+x$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\ln x+2+1=2\ln x+3$．

6．求由方程 $y=1+x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

解 两边求导 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ……（*），所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}$，再由（*）式两端同时对 x 求导得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\mathrm{e}^y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\mathrm{e}^y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{1-x\mathrm{e}^y}=\frac{2\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\mathrm{e}^y\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{1-x\mathrm{e}^y}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^y\left(2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)}{1-x\mathrm{e}^y}\xlongequal{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)$$

$$=2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3\xlongequal{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}}2\left(\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}\right)^2+x\left(\frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}\right)^3$$

$$\xlongequal{1-x\mathrm{e}^y=2-y}2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2y}}{(2-y)^2}+x\cdot\frac{\mathrm{e}^{3y}}{(2-y)^3}$$

$$=\mathrm{e}^{2y}\cdot\frac{3-y}{(2-y)^3}.$$

7．求下列函数的 n 阶导数：

（1）$y=\sqrt[m]{1+x}$；　　　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$．

解 （1）$y=(1+x)^{\frac{1}{m}}$，$y'=\dfrac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}$，$y''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}$，

$y'''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)\left(\dfrac{1}{m}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-3}$，以此类推 $y^{(n)}=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}$．

（2）$y^{(n)}=\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$．

8．利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值．

解 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.02$，于是由近似公式得

$$\sqrt[3]{1.02}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}0.02=1+\frac{1}{3}\times(0.02)=1.007.$$

9．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义，$f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 x_0 处连续，试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性．

解 令 $F(x)=f(x)g(x)$，在 x_0 处给增量 Δx，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x}$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x},$$

因为 $g(x)$ 在 x_0 处连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\right]}{\Delta x}=0$，又因为 $f(x_0)=0$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta x}=f'(x_0)g(x_0)$，即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的导数为 $f'(x_0)g(x_0)$．

10．设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1）$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in R$；

（2）$f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$，

证明 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$．

解 对任意 $x\in R$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\overset{f(x+\Delta x)=f(x)f(\Delta x)}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-1]}{\Delta x}\overset{f(\Delta x)=1+\Delta xg(\Delta x)}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[1+\Delta xg(\Delta x)-1]}{\Delta x}$$

$$\overset{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(\Delta x)=1}{=\!=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to 0}f(x)g(\Delta x)=f(x).$$

所以 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$．

自测题 2

1．填空题.

（1）$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的__________条件．$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的__________条件；

（2）$f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在并且相等，是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的__________条件；

（3）$f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的__________条件；

（4）函数 $y=(1+x)\ln x$ 上点 $(1,0)$ 处的切线方程为__________；

（5）已知 $f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-3h)}{2h}=$__________；

（6）若 $f(u)$ 可导，则 $y=f(\sin\sqrt{x})$ 的导数为__________；

（7）曲线 $y=\mathrm{e}^x-3\sin x+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程为__________；

（8）若 $f'(x_0)=1$，$f(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)=$__________；

（9）$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$，则 $f'(x)=$__________；

（10）$y=\cos(\mathrm{e}-x)$，则 $y'(0)=$__________；

（11）设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$（$n\geqslant 2$），则 $f'(0)=$__________.

解 （1）充分，必要；（2）充分必要；（3）充分必要；

（4）$k_{切}=y'|_{x=1}=\left[\dfrac{1}{x}+\ln x+1\right]_{x=1}=2$，且过点 $(1,0)$，切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$；

（5）
$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{2h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{1}{2}\cdot(-3)\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3-\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot3=6；$$

（6）$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\cdot f'(\sin\sqrt{x})$；

（7）$k_{切}=y'|_{x=0}=\left[\mathrm{e}^x-3\cos x\right]_{x=0}=-2$，且过点 $(0,2)$，切线方程为 $y-2=-2(x-0)$，即 $y+2x-2=0$；

（8）$\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)=-\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{f\left(x_0-\dfrac{1}{h}\right)-f(x_0)}{-\dfrac{1}{h}}=f'(x_0)=-1$；

（9）$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2$，令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$，所以有 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$；

（10）$y'=\sin(\mathrm{e}-x)$，则 $y'(0)=\sin\mathrm{e}$；

（11）$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!$.

2．单选题.

（1）选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（ D ）.

A．$\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在；　B．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在；

C．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在；　D．$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

提示：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$（$\Delta x=-h$）存在，按导数定义知 $f'(a)$ 存在.

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ B ）.

A．左、右导数都存在；　　B．左导数存在，右导数不存在；

C．左导数不存在，右导数存在；　　D．左、右导数都不存在.

（3）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\left(1+\left|\sin x\right|\right)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（ A ）.

A．充分必要条件；　　B．充分条件但非必要条件；

C．必要条件但非充分条件；　　D．即非充分条件又非必要条件.

（4） $y=\left|x+2\right|$ 在 $x=-2$ 处（ A ）.

A．连续；　　B．不连续；

C．可导；　　D．可微.

（5）下列函数中（ D ）的导数等于 $\sin 2x$.

A． $\cos 2x$ ；　　B． $\cos^2 x$ ；

C． $-\cos 2x$ ；　　D． $\sin^2 x$.

（6）已知 $y=\cos x$ ，则 $y^{(10)}=$（ D ）.

A． $\sin x$ ；　　B． $\cos x$ ；

C． $-\sin x$ ；　　D． $-\cos x$.

提示： $y^{(10)}=\cos(x+5\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x$.

（7）下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是（ B ）.

A． $y=\ln x$ ；　　B． $y=\left|\cos x\right|$ ；

C． $y=\left|\sin x\right|$ ；　　D． $y=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

（8）若函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a-bx, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 a,b 之值必为（ C ）.

A． $a=-1$，$b=-1$ ；　　B． $a=-1$，$b=1$ ；

C． $a=1$，$b=-1$ ；　　D． $a=1$，$b=1$.

（9）设 $f(x)=x\sin x$ ，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$（ B ）.

A． -1 ；　　B． 1 ；

C． $\dfrac{\pi}{2}$ ；　　D． $-\dfrac{\pi}{2}$.

（10）设直线 l 与 x 轴平行，且与曲线 $y=x-e^x$ 相切，则切点坐标是（ C ）.

A． $(1,1)$ ；　　B． $(-1,1)$ ；

C． $(0,-1)$ ；　　D． $(0,1)$.

（11）函数 $f(x)=\left|x\right|+1$ ，在 $x=0$ 处（ D ）.

A．无定义；　　B．不连续；

C．可导；　　D．连续但不可导.

3．计算题．

（1）设 $y=\ln\sin^2\dfrac{1}{x}$，求 y'．

（2）设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 y''．

（3）求函数 $y=\ln(x^3\cdot\sin x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$．

（4）设 $y=\ln^3\arcsin\sqrt{x}$，求 y'．

（5）设 $y=y(x)$，由 $\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

（6）设 $y=x^2 2^x+\dfrac{\cos x}{1-x^2}$，求 $\mathrm{d}y$．

解　（1）$y'=\dfrac{2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2}\cot\dfrac{1}{x}$；

（2）$y'=2x\arctan x+1$，$y''=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$；

（3）$\mathrm{d}y=\dfrac{3x^2\sin x+x^3\cos x}{x^3\sin x}\mathrm{d}x=\left(\dfrac{3}{x}+\cot x\right)\mathrm{d}x$；

（4）$y'=3\ln^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\ln^2\left(\arcsin\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}}$；

（5）方程两边对 x 求导，$\mathrm{e}^y y'+\mathrm{e}^{-x}+y+xy'=0$，解方程得 $y'=-\dfrac{y+\mathrm{e}^{-x}}{x+\mathrm{e}^y}$；

（6）
$$y'=2x2^x+x^2 2^x\ln 2+\frac{-\sin x\cdot(1-x^2)+2x\cos x}{(1-x^2)^2}$$
$$=2^{x+1}x+x^2 2^x\ln 2-\frac{\sin x}{1-x^2}+\frac{2x\cos x}{(1-x^2)^2},$$
$$\mathrm{d}y=\left[2^{x+1}x+x^2 2^x\ln 2-\frac{\sin x}{1-x^2}+\frac{2x\cos x}{(1-x^2)^2}\right]\mathrm{d}x.$$

2.4　同步练习及答案

同步练习

1．填空题．

（1）设 $f(x)=\cos^2 x$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$__________；

（2）设 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f'(2)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=$__________；

（3）曲线 $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程__________；

（4）设 $y=a^x$，则 $y^{(8)}=$ __________；

（5）设 $y=\sqrt{2+3x^2}$，则 $\mathrm{d}y=$ __________.

2．解答题.

（1）设 $y=\sqrt{(x^2+1)(3x-4)(x-1)}$，求 y'；

（2）求由方程 $x^2+2xy-2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与微分 $\mathrm{d}y$.

参考答案

1．（1）-1；（2）1；（3）$y=-x$；（4）$a^x(\ln a)^8$；（5）$x=-2$.

2．（1）$y'=\sqrt{(x^2+1)(3x-4)(x-1)}\cdot\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(3x-4)}+\dfrac{1}{2(x-1)}\right)$；

（2）$\mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{2y-x}\mathrm{d}x$.