第 1 章　函数、极限与连续

本章学习目标

- 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构
- 理解数列和函数极限的描述性概念，了解极限的性质
- 熟练掌握求极限的方法
- 了解分段函数及其在分段点处的极限和连续性
- 了解无穷大、无穷小的概念、性质及相互关系
- 理解函数连续的概念及有关性质，会判断函数间断点的类型
- 掌握闭区间上连续函数的性质

1.1　函 数

1.1.1　函数的概念

定义 1　设 x, y 是两个变量，D 是给定的数集，当 x 在非空数集 D 内任取一个数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$， $x \in D$.

这里 x 称为自变量， y 称为因变量或称为 x 的函数. 集合 D 是指使函数有意义的点的集合，称为函数的定义域，记为 D_f ，相应的 y 值组成的集合称为函数的值域，记为 Z_f .

当 x 取数值 $x_0 \in D_f$ 时，与 x_0 对应的数值 y 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ ，此时函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处有定义.

函数的定义域 D_f 和对应法则 f 是函数的两个主要要素.

如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是相同的函数.

如果一个函数在定义域的不同范围内有不同的函数关系，这样的函数称为分段函数.

例如函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1, \\ 2x, & x \geqslant 1 \end{cases}$ 是一个分段函数，在它的整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是一个函数而不是几个函数，但它的表达式在区间 $(-\infty, 1)$ 和区间 $[1, +\infty)$ 上是不同的.

常见的符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 也是一个分段函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如图 1.1.1 所示．

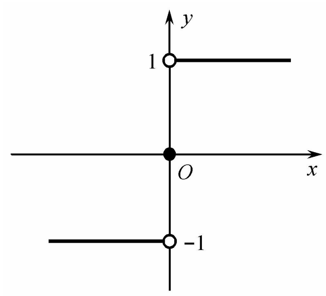


图 1.1.1

1.1.2　复合函数

定义 2　设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$．如果 $u=\varphi(x)$ 的值域 Z_φ 与 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 的交非空，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称 y 为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，u 称为中间变量．

例 1　问函数 $y=\arctan^2 \mathrm{e}^{\ln\sin x}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的？

解　是由 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=\mathrm{e}^w$，$w=\ln Y$，$Y=\sin x$ 复合而成的．

把一个较复杂的函数分解成几个较简单的函数，这对于今后的许多运算是很有用的．

并非任意两个函数都能复合成一个复合函数．例如 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x-2$，这是因为对于后一个函数的值域中的每一个 u 值，都不可能使前一个函数有意义．

1.1.3　反函数与隐函数

定义 3　设 $y=f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，其值域为 Z_f，对任意 $y\in Z_f$，如果有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之对应，则得到一个定义在 Z_f 上的以 y 为自变量的函数，我们称它为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．

我们总是习惯上用 x 表示函数的自变量，所以反函数一般记为 $y=f^{-1}(x)$．

通常，函数 $y=f(x)$ 的表示形式是一个解析式，如 $y=\sqrt{1+\sin x}$，$y=\arcsin 2x$ 等．用这种方法表示的函数称为显函数．有时变量 x,y 之间的函数关系是由某个二元方程 $F(x,y)=0$ 给出的，如 $x^2+y^2-xy+5=0$，$\sin(2xy)+\mathrm{e}^{x+y}=6$ 等，这种通过二元方程给出的 y 与 x 的函数关系称为隐函数．

有些隐函数可以改写成显函数的形式，而有些隐函数不能改写成显函数的形式，如 $\sin(xy)-2x^2y=1$．把隐函数改写成显函数，叫做隐函数的显化．

1.1.4　初等函数

1．基本初等函数

以下五类函数称为基本初等函数：

（1）幂函数 $y=x^\mu$（μ 为实数）．

（2）指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）．

（3）对数函数 $y = \log_a x$ （$a > 0$，$a \neq 1$）.

（4）三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$.

（5）反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或复合所构成的，并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如函数 $y = \sqrt{1 - \sin x}$ ，$y = \arcsin \dfrac{a}{x}$，$y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ 等都是初等函数.

分段函数不是初等函数.

1.1.5 函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对于任意 $x \in D_f$ ，恒有 $f(-x) = -f(x)$（或 $f(-x) = f(x)$），则称 $f(x)$ 为奇（或偶）函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

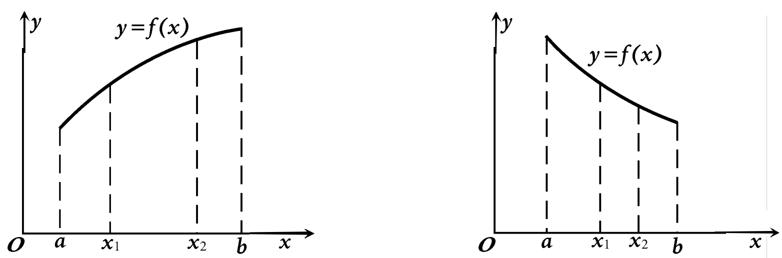
2. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f ，如果存在一个常数 $T \neq 0$ ，使得对任意的 $x \in D_f$ ，恒有 $f(x \pm T) = f(x)$（ $x \pm T \in D_f$ ），则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期是指函数 $f(x)$ 的最小正周期.

例如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π， $\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期为 π.

3. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，对 $[a,b]$ 内的任意两点 x_1 和 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调增加的，如图 1.1.2（a）所示；当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调减少的，如图 1.1.2（b）所示. 单调增加（或单调减少）的函数又称为递增（或递减）函数，统称为单调函数，使函数保持单调的自变量的取值区间称为该函数的单调区间.



（a）　　　　（b）

图 1.1.2

例如函数 $y=4x^2$，在区间 $[0,+\infty)$ 内单调增加；在区间 $(-\infty,0]$ 内单调减少；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有单调性.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正常数 M，使得对于区间 I 内所有的 x 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是有界的. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是无界的.

例如 $y=\sin x$，对于一切 x 都有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 又如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界，这是因为当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，但是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

习题 1.1

1．下列各题中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表示同一个函数，说明理由.

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$\varphi(x)=x+2$；（2）$f(x)=\ln x^2$，$\varphi(x)=2\ln x$.

2．求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；（2）$y=\ln\sqrt{9-x^2}$.

3．判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\dfrac{x^2\cdot\sin x}{x^2+1}$；（2）$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$.

4．如果 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5．下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

（1）$y=\ln(2x+1)^2$；（2）$y=\sin^2(3x+1)$.

6．求下列函数的反函数：

（1）$y=x^2-2x$，$[1,+\infty)$；（2）$q=3p-5$.

7．$f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$ 和 $f(x-1)$.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1. 数列

定义 1 自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$（$n=1,2,\cdots$），将其函数值按自变

量 n 由小到大的顺序排成的一列数 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$ 称为数列，简记为 $\{u_n\}$，其中 u_n 称为数列的通项或一般项.

单调数列：如果数列 $\{u_n\}$ 对于每一个正整数 n 都有 $u_n \leqslant u_{n+1}$（$u_n \geqslant u_{n+1}$），则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递增（减）数列；单调递增与单调递减的数列统称为单调数列.

有界数列：如果对于数列 $\{u_n\}$ 存在一个常数 M，使得对于其每一项 u_n，都有 $|u_n| \leqslant M$，则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列.

2. 数列的极限

下面我们研究当 n 无限增大时数列的变化趋势，考察下面几个数列：

（1）$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$，通项为 $u_n=\dfrac{1}{n}$；

（2）$\dfrac{2}{1},\dfrac{3}{2},\cdots,\dfrac{n+1}{n},\cdots$，通项为 $u_n=\dfrac{n+1}{n}$；

（3）$1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$，通项为 $u_n=(-1)^{n+1}$；

（4）$3,5,\cdots,2n+1,\cdots$，通项为 $u_n=2n+1$.

通过观察可以发现，数列（1）当 n 无限增大时，u_n 无限趋近于 0，即数列（1）以 0 为它的变化趋向；

数列（2）当 n 无限增大时，$u_n=\dfrac{n+1}{n}$ 无限趋近于常数 1，即数列（2）以 1 为它的变化趋向；

数列（3）当 n 无限增大时，$u_n=(-1)^{n+1}$ 的奇数项为 1，偶数项为 -1，随着 n 的增大，它的通项在 ±1 之间变动，所以当 n 无限增大时，没有确定的变化趋向；

数列（4）当 n 无限增大时，u_n 也无限增大.

通过以上 4 个例子的讨论可以看出，数列当 n 无限增大时，其变化趋向可分为两种：或者无限趋近于某个确定的常数，或者不趋近于任何确定的常数.

定义 2　对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限趋近于某个确定的常数 a，则称常数 a 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad 或 \quad u_n \to a \quad (n\to\infty).$$

若数列 $\{u_n\}$ 没有极限，则称数列是发散的.

数列（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；数列（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；数列（1）和数列（2）是收敛的.

数列（3）和数列（4）没有极限，这两个数列是发散的.

定理 1　单调有界数列必有极限.

证明略.

例 1　观察下列数列的极限：

（1）$u_n=1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；（2）$u_n=q^{n-1}$，$|q|<1$.

解 通过观察以上数列，有如下变化趋向：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]=1$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}=0$（$|q|<1$）.

1.2.2 函数的极限

数列是一种特殊的函数，下面将这种特殊函数的极限概念推广到一般函数的极限概念.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$. 从图 1.2.1 中可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 无限趋近于常数 1，此时我们称 1 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限.

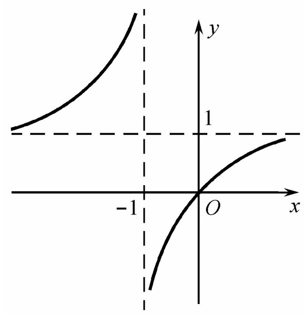


图 1.2.1

定义 3 如果当自变量 x 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

由定义 3 可知，1 为 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$.

同样，从图 1.2.1 中可以看出，当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 无限趋近于常数 1，此时我们称 1 为 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限.

定义 4 如果当自变量 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to-\infty).$$

关于 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义，可仿照上面定义给出.

定义 5 如果当 $|x|$ 无限增大时函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

由上面的讨论可知，函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-+\infty} f(x)=A\ .$$

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，从图 1.2.2 中可以看出，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值无限趋近于常数 2，此时我们称当 x 趋近于 1 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2.

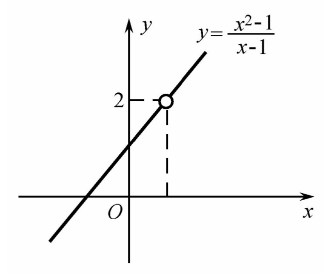


图 1.2.2

定义 6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义（x_0 可以除外），如果当自变量 x 趋近于 x_0（$x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \qquad (x\to x_0)\,.$$

说明 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限是否存在，与 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义以及在点 x_0 处的函数值无关.

在定义 6 中，x 是以任意方式趋近于 x_0 的，但在有些问题中，往往只需要考虑点 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋向.

左极限：如果当 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$）时 $f(x)$ 以 A 为极限，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0^-)\,.$$

右极限：如果当 x 从 x_0 的右侧（$x>x_0$）趋近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）时 $f(x)$ 以 A 为极限，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0^+)\,.$$

定理 3 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

这个定理常用来判断分段函数的极限是否存在.

例 2 判断函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x}, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否有极限.

解 计算函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{1-x}=-1\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1.$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限.

以上数列的极限、函数的极限描述的都是当自变量在某一变化过程中函数值的变化趋向，综合所有过程：$n \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$，$x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，无非是在自变量的某个变化过程中函数值趋近于某个确定常数．因此，极限定义可以统一叙述为：

定义 7　如果变量 Y 在自变量的某一变化过程中无限趋近于某一常数 A，则称 A 为变量 Y 的极限，简记为 $\lim Y = A$　或　$Y \to A$.

此定义称为变量的极限，在叙述时可省略变化过程.

3. 函数极限的性质

定理 4（唯一性定理）　如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限，则其极限是唯一的.

定理 5（有界性定理）　若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在，则必存在 x_0 的某一邻域，使得函数 $f(x)$ 在该邻域内有界（称收敛变量是往后有界的）.

定理 6（两边夹定理）　如果对于 x_0 的某邻域内的一切 x（x_0 可以除外），有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

1.2.3　无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 8　若函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某一变化过程中以零为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量，简称无穷小.

例 3　当 $x \to 0$ 时，x^2 的极限为零，所以当 $x \to 0$ 时，函数 x^2 为无穷小.

说明　无穷小是以零为极限的变量，不能将其与很小的常数相混淆．在所有常数中，零是唯一可以看作无穷小的数，这是因为如果 $f(x) \equiv 0$，则 $\lim f(x) = 0$．同时也要注意无穷小与自变量的变化过程有关．例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to \infty$ 时是无穷小量，而当 $x \to 1$ 时就不是无穷小量.

2. 无穷小的性质

定理 7　在自变量的同一变化过程中，

（1）有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

（2）有限个无穷小的乘积仍是无穷小；

（3）常数与无穷小的乘积仍是无穷小；

（4）有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，x 为无穷小，又因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 为有界量，因此当 $x \to 0$ 时，$x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量，所以

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 .$$

3．极限与无穷小的关系

定理 8　在自变量 x 的某一变化过程中，函数 $f(x)$ 有极限的充分必要条件是

$$f(x) = A + \alpha ,$$

其中 α 为这一变化过程中的无穷小.

4．无穷大量

定义 9　在自变量 x 的某个变化过程中，若函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为此变化过程中的无穷大量，简称无穷大.

无穷大是指绝对值无限增大的变量，不能与很大的常数相混淆，任何常数都不是无穷大.

5．无穷小与无穷大的关系

定理 9　在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例 5　考察 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

解　当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{x+1}{x-1} \to \infty$，所以当 $x \to 1$ 时，$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 为无穷大量；

当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{x-1}{x+1} \to 0$，所以当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x-1}{x+1}$ 为无穷小量.

习题 1.2

1．观察下列数列，哪些数列收敛？其极限是多少？哪些数列发散？

（1）$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$；　（2）$u_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$；

（3）$u_n = \dfrac{2n+3}{n^2}$；　（4）$u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$；

（5）$u_n = (-1)^n$；　（6）$u_n = \dfrac{4n+3}{3n-1}$.

2．设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，并问 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

是否存在.

3．观察下列函数，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

（1）$\dfrac{x-2}{x}$，当 $x \to 0$ 时；（2）$\lg x$，当 $x \to 0^+$ 时；

（3）$10^{\frac{1}{x}}$，当 $x \to 0^+$ 时；（4）$x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时；

（5）$2^{-x}-1$，当 $x \to 0$ 时；（6）e^{-x}，当 $x \to +\infty$ 时.

1.3 极限的运算

1.3.1 极限的运算法则

定理 1 若在同一过程下，$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

（1）$\lim\left[f(x) \pm g(x)\right]=A \pm B$；

（2）$\lim\left[f(x) \cdot g(x)\right]=A \cdot B$；

（3）$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （$B \neq 0$）.

定理 1 中的（1）和（2）可推广到有限多个函数的情形，即有限个函数代数和的极限等于极限的代数和；有限个函数乘积的极限等于极限的乘积.

特别地，在（2）中若 $g(x) \equiv C$，则有

$$\lim_{x \to x_0}(Cf(x))=C \cdot A .$$

以上结论对于自变量的任何变化过程都同样成立.

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2+5x-2)$.

解 $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2+5x-2)=\lim\limits_{x \to 2}3x^2+\lim\limits_{x \to 2}5x-\lim\limits_{x \to 2}2=20$.

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{2x^2+2x-1}{3x^2+1}$.

解 $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{2x^2+2x-1}{3x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(2x^2+2x-1)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x^2+1)}=\dfrac{11}{13}$.

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 3}(x^2-9)=0$，不能直接用定理 1 中商的极限运算法则．注意到分子的极限也为零，此时可首先找出分子分母中的零因子 $x-3$，当 $x \to 3$ 时，由函数的极限定义知 $x \neq 3$，这样可先约去零因子，再计算极限.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 1}$.

解　当 $x \to \infty$ 时，分子、分母都是无穷大，不能直接利用商的极限运算法则，此时可先将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3，易知

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2\left(\dfrac{1}{x}\right) - \left(\dfrac{1}{x}\right)^3}{2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3} = \frac{1}{2}.$$

一般地，对于有理函数（即两个多项式函数的商）的极限，有以下结论：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \infty, & m < n, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n, \end{cases}$$

其中 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$.

例 5　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1}$.

解　分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^2，得极限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{3 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left[2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right]}{\lim\limits_{x \to \infty}\left[3 + \dfrac{1}{x^2}\right]} = \frac{2}{3}.$$

1.3.2　两个重要极限

1．$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

证　当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的极限不能用商的运算法则来计算.为证明这个极限，作一单位圆（如图 1.3.1 所示），令 $\angle AOB = x$，设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，过点 A 作切线 AC，那么 $\triangle AOC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\tan x$，扇形 AOB 的面积为 $\dfrac{1}{2}x$，$\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\sin x$，因为扇形面积介于两个三角形面积之间，所以

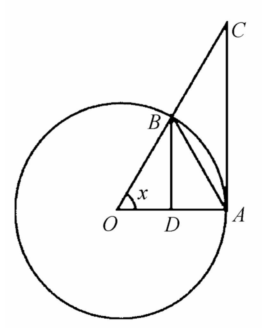


图 1.3.1

$$\frac{1}{2}\sin\ x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan\ x,$$

即 $\sin\ x<x<\tan\ x$.

因为 $\sin x>0$，用 $\sin\ x$ 除上式，有

$$1<\frac{x}{\sin\ x}<\frac{1}{\cos\ x}\quad 或 \quad \cos\ x<\frac{\sin\ x}{x}<1.$$

由于 $\frac{\sin\ x}{x}$ 或 $\cos\ x$ 都是偶函数，所以当 x 取负值时上式也成立，因而当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时有

$$\cos x<\frac{\sin\ x}{x}<1.$$

由图 1.3.1 不难看出，当 $x\to 0$ 时， $\cos\ x=OD\to OA=1$，于是由极限的两边夹定理有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1.$$

此极限也可记为：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\ \square}{\square}=1\quad（方块\square代表同一变量）.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ mx}{nx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ mx}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{m}{n}.\frac{\sin\ mx}{mx}=\frac{m}{n}$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan\ x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\sin\ x}{\cos\ x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos\ x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\ x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\ x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin\ \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\cdot\sin\ \frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\cdot\sin\ \frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

这里 e 是一个无理数 2.718281828459045….

此极限也可记为：$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$（方块□代表同一变量）.

如果令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，从而

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$，

或令 $t=\dfrac{x}{2}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\mathrm{e}$.

1.3.3 无穷小的比较

在前面有关无穷小的讨论中，没有提及两个无穷小之比，这是因为两个无穷小的比会出现不同的情况．例如，当 $x\to 0$ 时，x，x^2，$\sin x$，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 等都是无穷小，但它们的比在 $x\to 0$ 时却有不同的变化形态，$\dfrac{x^2}{x}\to 0$，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，$\dfrac{x}{x^2}\to\infty$，而 $\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ 没有极限.

这一事实反映了同一过程中，如 $x\to 0$ 时各个无穷小趋于 0 的快慢程度，因此有必要进一步讨论两个无穷小之比.

定义 1 设α与β是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，则在所讨论的过程中：

（1）若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小，记作$\alpha=o(\beta)$；

（2）若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to c\neq 0$，$c$为常数，则称$\alpha$与$\beta$为同阶无穷小；

（3）若$\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$，则称$\alpha$与$\beta$为等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$.

例 12 证明当$x\to 0$时，$\arcsin x$与x是等价无穷小.

证 令$\arcsin x=t$，则$x=\sin t$，当$x\to 0$时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,$$

故当$x\to 0$时，$\arcsin x\sim x$.

同理，当$x\to 0$时，$\arctan x$与x也是等价无穷小.

习题 1.3

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$；（2）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-5x+2}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}$；

2．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$；（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$.

1.4 函数的连续性

1.4.1 函数的连续性概念

在现实生活中有许多的量都是连续变化的，例如气温变化、植物的生长、物

体的运动路程等，这些现象反映到数学上，就是所谓的函数的连续性.

1. 增量

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 由 x_0（称为初值）变化到 x_1（称为终值）时，终值与初值之差 x_1-x_0 称为自变量的增量（或改变量），记为 $\Delta x=x_1-x_0$.

相应地，函数的终值 $f(x_1)$ 与初值 $f(x_0)$ 之差 $f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 称为函数的增量（或改变量），记为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

几何上，函数的增量表示当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线上对应点的纵坐标的增量（如图 1.4.1 所示）.

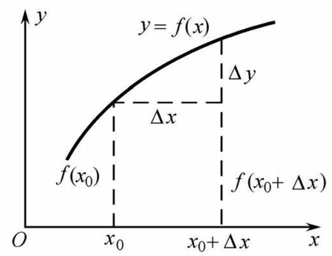


图 1.4.1

2. 连续

函数在某点 x_0 处连续，在几何上表示为函数图形在 x_0 处附近为一条连续不断的曲线；从图 1.4.1 可以看出，其特点是当自变量的增量 Δx 趋于零时，函数的增量 Δy 也趋于零.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果当自变量的增量 Δx 趋于零时，函数的增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

定义 1 中，若记 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，故定义 1 又可叙述为：

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于函数在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

3. 左右连续

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

4. 区间连续

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

5. 极限与连续的关系

（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限一定存在；反之，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定连续.

（2）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，求 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 时，只需求出 $f(x_0)$ 即可.

（3）当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

这个等式的成立意味着在函数连续的前提下，极限的符号和函数符号可以互相交换，这一结论给我们求极限带来了许多方便.

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，且 $y = \ln u$ 在 $u = \mathrm{e}$ 连续，则

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln \mathrm{e} = 1.$$

1.4.2 函数的间断点及其分类

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

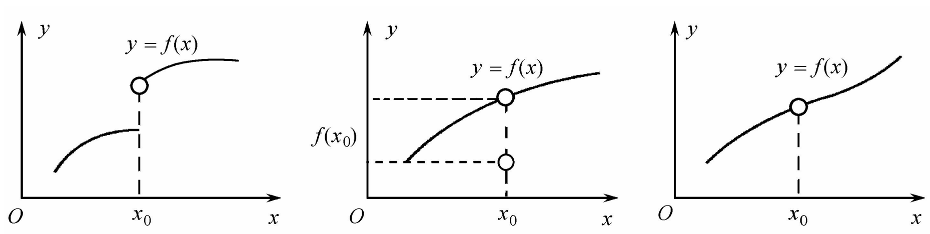
根据函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义可知，如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一，则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个间断点.

（1）$f(x)$ 在 x_0 点没有定义；

（2）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，并且函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，如图 1.4.2 所示，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.



（a）　　　（b）　　　（c）

图 1.4.2

考察函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\leqslant 1,\\ 1+\sqrt{x}, & x>1,\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+\sqrt{x})=2$，所以函数在 $x=1$ 处间断.

函数 $f(x)$ 在点 $x_0=1$ 处的左、右极限存在但不相等，点 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

例 2 考察函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 3, & x=1.\end{cases}$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $f(1)=3$，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限存在但不等于该点处的函数值，所以函数在 $x=1$ 处间断，如果改变定义，令 $x=1$ 时 $f(1)=2$，则所构造的新的函数在 $x=1$ 处成为连续函数.

一般地，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，但不等于函数在该点的函数值（如图 1.4.2（b）所示）；或者函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，但函数在该点处没有定义（图 1.4.2（c）所示），设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，可以通过改变或补充定义使函数在点 x_0 处的函数值等于 A，即构造一个新的函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ A, & x=x_0.\end{cases}$$

这时，$\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点，可去间断点是第一类间断点.

例 3 考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. 该函数在 $x=-1$ 处没有定义，所以函数在 $x=-1$ 处间断；又因为 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$（如图 1.4.3 所示），极限不存在，趋于无穷，所以 $x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 的第二类间断点，也称为无穷间断点.

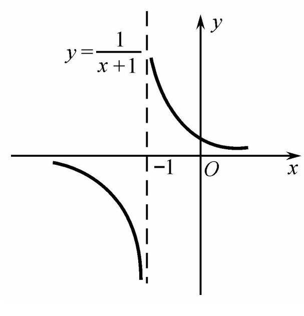


图 1.4.3

1.4.3 初等函数的连续性

由函数在某点连续的定义以及极限的四则运算法则，可得如下定理：

定理 1（连续函数的四则运算） 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

在 x_0 点处也连续.

此定理表明，连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍是连续函数.

定理 2（反函数的连续性） 连续函数的反函数在其对应区间上也是连续函数.

由定理 1 和定理 2 容易证明：基本初等函数在其定义域内连续.

定理 3（复合函数的连续性） 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)].$$

此定理表明，由连续函数复合而成的复合函数仍是连续函数.

由以上三个定理可知：一切初等函数在其有定义的区间内是连续的.

1.4.4 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有一些重要性质，这些性质在理论和实践上都有着广泛的应用，它们的几何意义都很直观，容易理解.

定理 4（最值定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在这个区间上一定有最大值和最小值.

即，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一点 x_1，对于任意 $x\in[a,b]$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x)$；也至少存在一点 x_2，对于任意 $x\in[a,b]$，都有 $f(x_2)\geqslant f(x)$（如图 1.4.4 所示）. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 分别称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

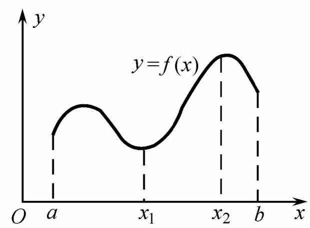


图 1.4.4

注意，对于在开区间连续的函数或在闭区间上有间断点的函数，结论不一定正确．如函数 $y=x^2$ 在 $(-1,1)$ 内没有最大值，只有最小值．又如函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x<0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

在闭区间 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$，它在此区间上没有最大值和最小值.

定理 5（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，C 为介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

定理 5 的几何意义是：连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一个交点（如图 1.4.5 所示）.

在介值定理中，如果 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，并取 $C=0$，即可得如下推论：

推论 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，如图 1.4.6 所示.

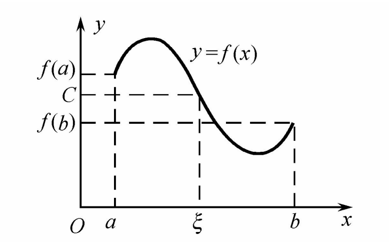


图 1.4.5

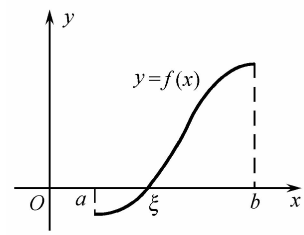


图 1.4.6

推论表明，对于方程 $f(x)=0$，若 $f(x)$ 满足推论中的条件，则方程在 (a,b) 内至少存在一个根 ξ， ξ 又称为函数 $f(x)$ 的零点，此时推论又称为零点定理或根的存在性定理．

例 4　证明三次代数方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根．

证　设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(0)=1>0，f(1)=-2<0；$$

由介值定理可知，在区间 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根．

习题 1.4

1．求下列函数的间断点，并确定其所属类型．如果是可去间断点，试补充或改变函数定义使函数在该点连续．

（1） $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$；　　（2） $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

（3） $y=\dfrac{x}{\sin x}$；　　（4） $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；

（5） $y=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2x+1, & 1\leqslant x<2,\\ 1+x^2, & x\geqslant 2;\end{cases}$　　（6） $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^3+2x^2+x}{\sin x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处是否连续？

3．在下列函数中，a 取何值时函数连续？

（1） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4,\\ a, & x=4;\end{cases}$　　（2） $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

4．证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 至少有一个小于 1 的正根．

1.5　利用 Mathematica 作图及进行函数与极限运算

Mathematica 是常用的数学软件，它有极其强大的功能．在本书各章节中，我们将简单介绍该软件的一般功能的实现．

1.5.1　一元函数的图形

利用 Mathematica 系统中的绘图函数 Plot，可以很方便地画出任意复杂的初等函数的图形，其格式为：

（1）Plot[f(x),{x,xmin,xmax},选项]：在区间[xmin,xmax]上按选项的要求画出函数 f(x) 的图形，选项可省略．

（2）Plot[f_1(x),f_2(x),……],{x,xmin,xmax},选项]：在区间[xmin,xmax]上按选项的要求同时画出几个函数的图形．

例 1　在区间[-2,2]上作出函数 $f(x)=x^2+2x-5\sin\ x$ 的图形．

解　输入 Plot[x^2+2x-5Sin[x],{x,-2,2}]，执行后得到如图 1.5.1 所示的图形．

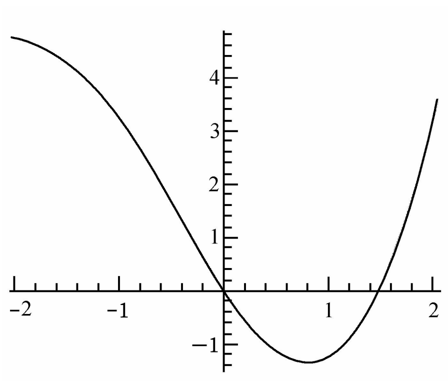


图 1.5.1

例 2　在区间[-2,2]上作出函数 $\sin x$，$\sin 2x$，$\sin 3x$ 的图形．

解　输入 Plot[{Sin[x],Sin[2x],Sin[3x]},{x,-2,2}]，执行得到如图 1.5.2 所示的图形．

例 3　将例 1 中的图形规定因变量的范围为[0,5]．

解　输入 Plot[x^2+2x-5Sin[x],{x,-2,2},PlotRange->{0,5}]，执行得到如图 1.5.3 所示的图形．

注：符号 $\to$ 或->表示函数内部的选项．

例 4　在区间[2,16]上作出函数 $f(x)=(x^2-x)\sin\ x$ 的图形，并给 x , y 轴分别加标记“ x ”和“ y ”．

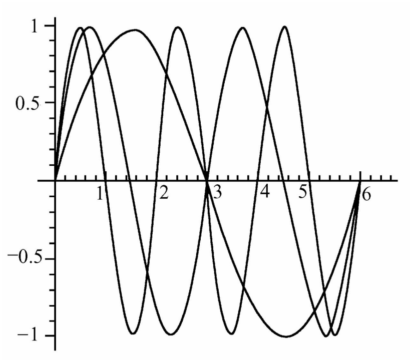


图 1.5.2

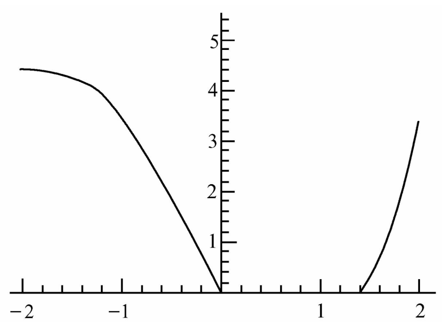


图 1.5.3

解　输入 Plot[(x^2-x)Sin[x],{x,2,16},AxesLabel->“x”,“y”]，执行得到如图 1.5.4 所示的图形.

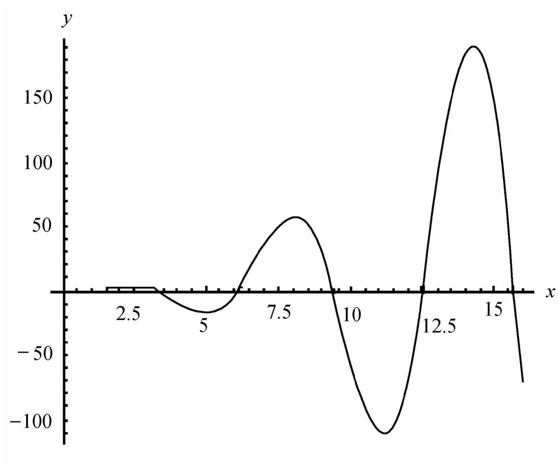


图 1.5.4

例 5 在区间[0,3]上作出函数 $\sin x$ 的图形，并给图形加上框线和网格.

解 输入 Plot[Sin[x],{x,0,3},Frame->True,GridLines->Automatic]，执行得到如图 1.5.5 所示的图形.

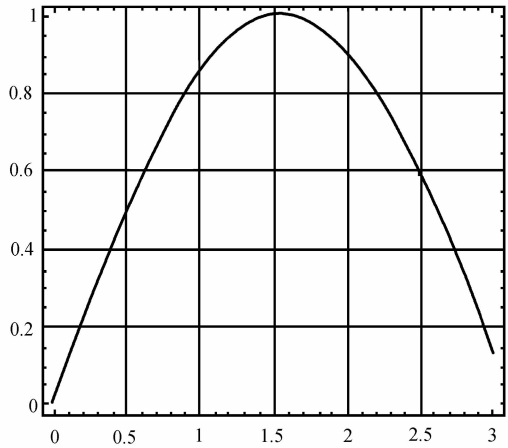


图 1.5.5

1.5.2 求极限

例 6 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)n^n}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n}$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{6x^2-12x+1}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 输入 In[1] = Limit[n ∗ sin[1/ n], n− > Infinity]，

Out[1] = 1；

输入 In[2] = Limit[(n + 1) ^ (n + 1) /(n + 2) / n^{n}, n− > Infinity]，

Out[2] = e；

输入 In[3] = Limit[((−1) ^ 2) ^ n, n− > Infinity]，

Out[3] = 1；

输入 In[4] = Limit[(x ^ 2 − 1) /(6x ^ 2 − 12x + 1), x− > Infinity]，

Out[4] = 1；

输入 In[6] = Limit[(tan[x] − sin[x]) / x ^ 3, x− > 0]，

Out[6] = $\dfrac{1}{2}$.

本章小结

1. 函数的两要素

函数的定义域和对应法则称为函数的两要素，要判断两个函数是否相同，就是要看这两要素是否相同.

2. 函数的定义域

函数的定义域是指使函数有意义的全体自变量构成的集合，求函数的定义域要考虑下列几个方面：

（1）分式的分母不能为零；

（2）偶次根式下不能为负值；

（3）负数和零没有对数；

（4）反三角函数要考虑主值区间；

（5）代数和的情况下取各式定义域的交集.

3. 复合函数

（1）构成复合函数 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 要求外函数 $y=f(u)$ 的定义域与内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空，即 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$；

（2）复合函数的复合过程有两层意义：一是将简单函数用“代入”的方法构成复合函数，二是能将复合函数分解成基本初等函数或由其和、差、积、商构成的简单函数.

4. 五类基本初等函数及其性质

5. 掌握下列求极限的几种方法

（1）利用极限的四则运算法则求极限；

（2）利用无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小求极限；

（3）利用两个重要极限求极限.

要理解下面这两个公式的真正含义：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\ \square}{\square}=1,\qquad \lim_{\Delta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=\mathrm{e},$$

式中的□和 Δ 分别代表某一过程中的变量；

（4）利用无穷小与无穷大的倒数关系求极限；

（5）利用函数的连续性求极限；

（6）利用两个多项式商的极限公式求极限；

（7）利用有理式分解后消掉零因子求极限.

6. 函数的连续性

函数的连续性部分主要应掌握函数在点 x_0 连续的判别方法，掌握函数在点 x_0 连续和在点 x_0 极限存在的关系，会判别间断点的类型.

复习题 1

1．已知 $f(x)=ax+b$ ，且 $f(0)=-2$，$f(3)=5$ ，求 a 和 b .

2．已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$ ，求 $y=f(x-2)$ 的定义域.

3．判断下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ ；　　（2） $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

4．求下列函数的反函数：

（1） $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ ；　　（2） $y=1-\lg(x+2)$.

5．复合函数 $y=\sin^2(2x+5)$ 是由哪些简单函数复合而成的.

6．求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$ ；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{1-\sqrt{1+\tan x}}$ ；　　（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

7．证明当 $x\to 0$ 时， $\mathrm{e}^x-1\sim x$ ，并利用此结果求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\mathrm{e}^x-1}$.

8．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin \pi x, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值.

9．设甲车间生产某产品 2000 箱，每箱定价为 280 元，销售量在 900 箱以内按原价销售，超过 900 箱的部分在原价的基础上打八折销售，试建立销售总收入 R 与销售量 Q 之间的函数关系式.

自测题 1

一、填空题

1．函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是________________________.

2．函数 $y=\mathrm{e}^x-1$ 的反函数是________________________.

3．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{2x}=2$ ，则 $k=$ ________________________.

4． $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=$ ________________________.

5．设函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的____________________间断点.

6．设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$，则当 $x\to$ ____________________时，$f(x)$ 为无穷大.

二、选择题

1．函数 $y=1+\sin x$ 是（　　）.

A）无界函数　　B）单调减少函数

C）单调增加函数　　D）有界函数

2．下列极限存在的是（　　）.

A）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$　　B）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x+1}{3x^4-x+2}$

C）$\lim\limits_{x\to\infty}\ln|x|$　　D）$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

3．当 $x\to 0$ 时，（　　）与 x 不是等价无穷小.

A）$\ln(1+x)$　　B）$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

C）$\tan x$　　D）$\sin x$

三、计算题

1．设 $f(x)=x^2-2x+1$，求 $f(2)$，$f(x+1)$.

2．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$.

3．求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x, & x<0,\\ k, & x=0,\\ x\cdot\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点处连续，求 k 的值.