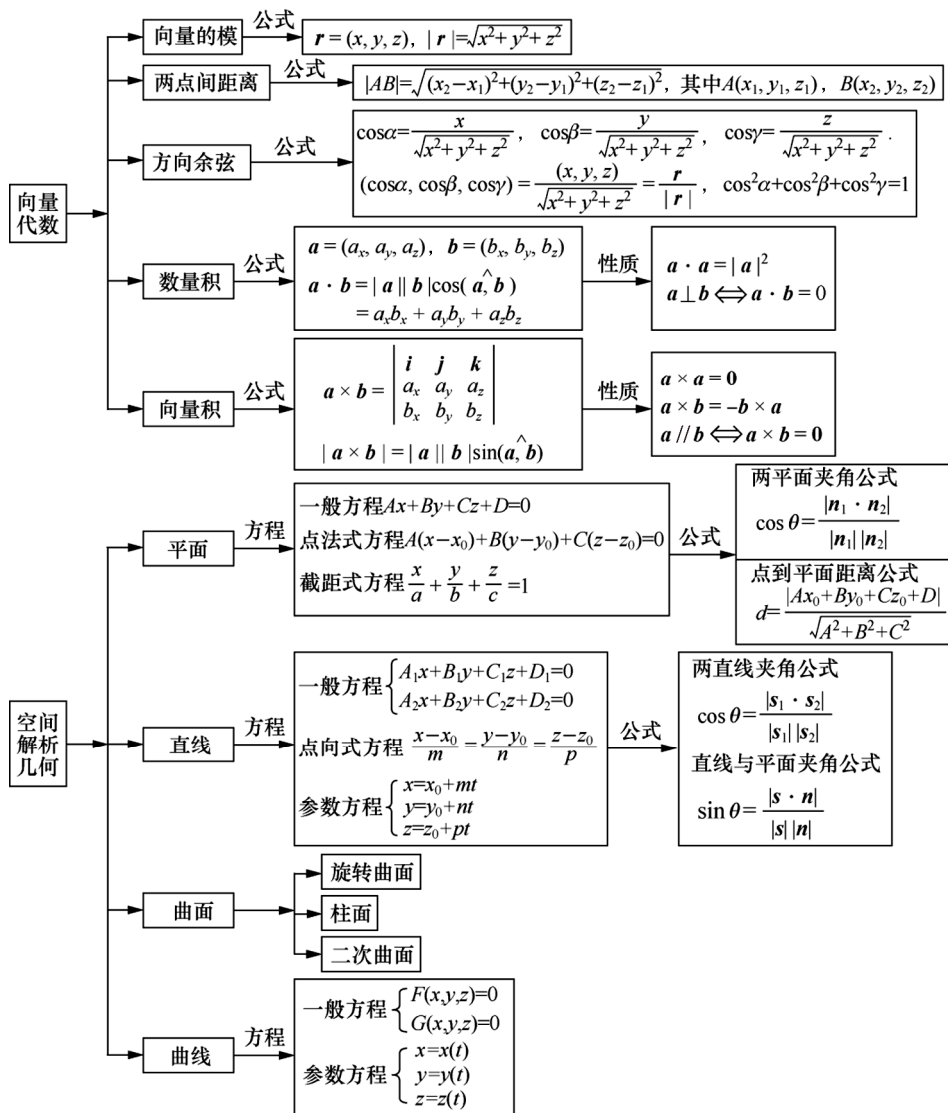


## 第 7 章 空间解析几何与向量代数

### 知识结构图



## 本章学习目标

- 理解向量及其相关概念, 了解向量的线性运算.
- 掌握向量的数量积和向量积运算.
- 了解常见的曲面与曲线方程.
- 掌握平面和直线的方程及其求法, 会利用平面、直线之间的相互关系解决有关问题.

## 7.1 向量及其线性运算

### 7.1.1 知识点分析

#### 1. 向量及其相关概念

(1) **向量** 既有大小又有方向的量, 称为向量, 记作  $\boldsymbol{a}$  或者  $\overrightarrow{AB}$ .

(2) **向量的模** 向量的大小叫作向量的模, 记作  $|\boldsymbol{a}|$  或者  $|\overrightarrow{AB}|$ . 其中, 模为0的向量称为零向量, 记作  $\mathbf{0}$  或者  $\vec{0}$ ; 模为1的向量称为单位向量, 常记作  $\boldsymbol{e}$ .

(3) **向量的夹角** 设有两个非零向量  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$ , 向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的夹角记作  $(\hat{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b})$  或  $(\boldsymbol{a}, \hat{\boldsymbol{b}})$ . 如果向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在  $0 \sim \pi$  之间任意取值. 特别地, 当  $(\hat{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}) = 0$  或  $\pi$  时, 称向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  平行, 记作  $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ ; 当  $(\hat{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}) = \frac{\pi}{2}$  时, 称向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  垂直, 记作  $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ .

#### 2. 向量的线性运算

(1) **加法运算** 设有两个向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$ , 任取一点  $A$ , 作  $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ , 再作  $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ , 连接  $AC$  (图 7.1), 那么向量  $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$  称为向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的和, 记作  $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ , 即  $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ . 这种作出两向量之和的方法叫作向量相加的三角形法则.

**注** 也可以利用平行四边形法则表示两向量的和.

设  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  为两个非零向量, 把向量  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  平行移动使它们的起点重合于  $M$ , 并以  $\boldsymbol{a}$ ,  $\boldsymbol{b}$  为邻边作平行四边形, 可知对角线  $\overrightarrow{MN}$  为向量  $\boldsymbol{a}$  与  $\boldsymbol{b}$  的和, 这种作出两向量之和的方法叫作向量相加的平行四边形法则 (图 7.2).

(2) **减法运算** 规定  $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$  (图 7.3).

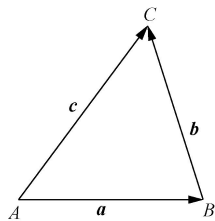


图 7.1

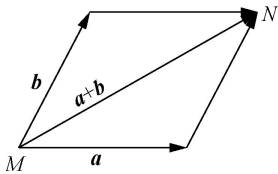


图 7.2

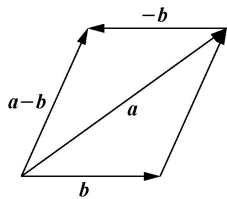


图 7.3

(3) **数乘运算** 向量  $\mathbf{a}$  与实数  $\lambda$  的乘积是一个向量, 记作  $\lambda\mathbf{a}$ , 并且规定: 它的模  $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ ; 它的方向当  $\lambda > 0$  时与  $\mathbf{a}$  相同, 当  $\lambda < 0$  时与  $\mathbf{a}$  相反, 当  $\lambda = 0$  时为零向量.

特别指出,  $\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  是与非零向量  $\mathbf{a}$  同向的单位向量,  $\mathbf{e}_a = \pm \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$  是与非零向量  $\mathbf{a}$

平行的单位向量.

向量的加减法与数乘运算统称为向量的线性运算.

### 3. 卦限的划分

八个卦限, 按照逆时针方向确定, 分别用罗马数字 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示.

### 4. 利用坐标做向量的线性运算

设  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \quad \lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

### 5. 向量的模

设向量  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , 向量  $\mathbf{r}$  的模  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### 6. 两点间的距离公式

设有点  $A(x_1, y_1, z_1)$  和点  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A$  与  $B$  两点之间的距离为

$$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

### 7. 方向角和方向余弦

设向量  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , 则  $\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

注  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ;  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r$  是与非零向量  $\mathbf{r}$  同

向的单位向量.

## 8. 向量在轴上的投影

(1) 向量  $r$  在  $u$  轴上的投影  $\text{Prj}_u r = |r| \cos \varphi$ , 其中  $\varphi$  是向量  $r$  与  $u$  轴的夹角.

(2) 设向量  $a = (a_x, a_y, a_z)$ , 则向量  $a$  的坐标  $a_x, a_y, a_z$  分别是向量  $a$  在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的投影.

## 7.1.2 典例解析

## 1. 向量及其线性运算

例 1 在  $\triangle ABC$  中,  $\overrightarrow{AB} = c$ ,  $\overrightarrow{AC} = b$ , 若点  $D$  满足  $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ , 则  $\overrightarrow{AD} =$  \_\_\_\_\_.

A.  $\frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c$       B.  $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c$       C.  $\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$       D.  $\frac{5}{3}c - \frac{2}{3}b$

解 如图 7.4 所示, 在  $\triangle ABC$  中,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c, \text{ 从而答案选 C.}$$

例 2 证明: 三角形两边中点的连线平行于第三边, 且是它长度的一半.

解 如图 7.5 所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB$  边的中点记为  $D$ ,  $AC$  边的中点记为  $E$ , 由  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ , 从而  $\overrightarrow{DE}$  与  $\overrightarrow{BC}$  平行, 且是  $\overrightarrow{BC}$  长度的一半.

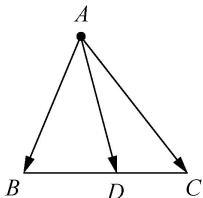


图 7.4

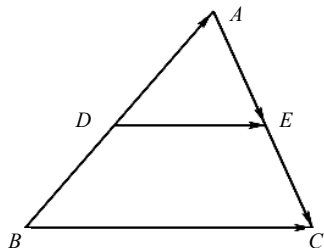


图 7.5

## 2. 利用向量的线性运算表示向量

例 3 已知  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (2, 4, 5)$ , 求  $a + b$ ,  $a - b$ ,  $a + 2b$ .

解 根据向量的运算公式, 得

$$a + b = (1+2, 2+4, 3+5) = (3, 6, 8), \quad a - b = (1-2, 2-4, 3-5) = (-1, -2, -2),$$

$$a + 2b = (1+4, 2+8, 3+10) = (5, 10, 13).$$

例 4 已知  $\overrightarrow{OM} = (-3, 0, 4)$ ,  $\overrightarrow{ON} = (5, -2, -14)$ , 求  $\angle MON$  平分线上的单位向量.

解 设  $\overrightarrow{OP}$  为  $\angle MON$  平分线上的一个向量, 取  $\overrightarrow{OP} = e_{\overrightarrow{OM}} + e_{\overrightarrow{ON}}$ , 其中

$$\mathbf{e}_{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \frac{(-3, 0, 4)}{\sqrt{(-3)^2 + 0 + 4^2}} = \frac{1}{5}(-3, 0, 4),$$

$$\mathbf{e}_{\overline{ON}} = \frac{\overline{ON}}{|\overline{ON}|} = \frac{(5, -2, -14)}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-14)^2}} = \frac{1}{15}(5, -2, -14),$$

所以  $\overline{OP} = \mathbf{e}_{\overline{OM}} + \mathbf{e}_{\overline{ON}} = \frac{1}{5}(-3, 0, 4) + \frac{1}{15}(5, -2, -14) = -\frac{2}{15}(2, 1, 1)$ , 故所求单位向量为

$$\mathbf{e}_{\overline{OP}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}(2, 1, 1).$$

**点拨** 先找到  $\angle MON$  平分线上的一个向量, 再化成单位向量.

3. 求向量的方向余弦、方向角

**例5** 已知两点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(0, 3, 3)$ , 求向量  $\overline{AB}$  的模、方向余弦、方向角以及与向量  $\overline{AB}$  同向的单位向量.

**解**  $\overline{AB} = (0-1, 3-2, 3-3) = (-1, 1, 0)$ , 则  $|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$ , 所以  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \gamma = 0$ ,  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ; 与向量  $\overline{AB}$  同向的单位向量  $\mathbf{e}_{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)$ .

**点拨** 方向角的范围为  $[0, \pi]$ ; 与一个向量平行的单位向量, 除了同向的单位向量外, 还包括反向的单位向量.

**例6** 已知向量  $\mathbf{a}$  与  $x$  轴,  $y$  轴正向的夹角分别为  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ , 且  $|\mathbf{a}| = 4\sqrt{2}$ , 求向量  $\mathbf{a}$ .

**解** 由  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ , 可得  $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ; 又  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$ ,

可得  $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$ ; 所以

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 4\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) = (4, 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}).$$

### 7.1.3 习题解答

1. 设向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  均为非零向量, 给出下列等式成立的条件.

$$(1) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|; \quad (2) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|;$$

$$(3) |a+b| = ||a|-|b||; \quad (4) \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}.$$

解 (1)  $a \perp b$ ; (2)  $a$  与  $b$  同向; (3)  $a$  与  $b$  反向; (4)  $a$  与  $b$  同向.

2. 设  $u = 3a - 2b + c$ ,  $v = a + b - c$ . 试用  $a, b, c$  表示向量  $3u - 2v$ .

解  $3u - 2v = 3(3a - 2b + c) - 2(a + b - c) = 7a - 8b + 5c$ .

3. 已知菱形  $ABCD$  的对角线  $\overrightarrow{AC} = a$ ,  $\overrightarrow{BD} = b$ , 试用向量  $a, b$  表示  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DA}$ .

解 如图 7.6 所示, 由  $\begin{cases} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} = b, \\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} = a \end{cases}$  得  $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(a+b), \\ \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(b-a). \end{cases}$  又  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} =$

$$\frac{1}{2}(a-b), \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(b-a), \quad \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(a+b).$$

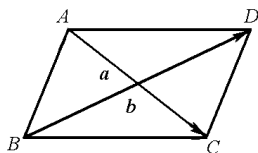


图 7.6

4. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限.

$A(4, -2, 3)$ ,  $B(5, 1, -4)$ ,  $C(-1, 3, 2)$ ,  $D(-6, -3, -1)$ .

解  $A$  (IV),  $B$  (V),  $C$  (II),  $D$  (VII).

5. 指出下列各点在哪个坐标面上或坐标轴上.

$A(1, 4, 0)$ ,  $B(0, 5, 3)$ ,  $C(1, 0, 0)$ ,  $D(0, -1, 0)$ .

解  $A, B, C, D$  依次在  $xOy$  面上、 $yOz$  面上、 $x$  轴上、 $y$  轴上.

6. 已知  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(5, -3, 4)$ ,  $C(2, 1, 6)$ , 试求向量  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  的坐标,

并验证:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$ .

证明  $\overrightarrow{AB} = (6, -5, 1)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-3, 4, 2)$ ,  $\overrightarrow{CA} = (-3, 1, -3)$ , 从而

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (6, -5, 1) + (-3, 4, 2) + (-3, 1, -3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

7. 设  $a = 3i + 5j - 4k$ ,  $b = 2i + j + 8k$ , 求  $a - b$  及  $3a + 2b$ .

解  $a - b = (3i + 5j - 4k) - (2i + j + 8k) = i + 4j - 12k$ ;

$$3a + 2b = 3(3i + 5j - 4k) + 2(2i + j + 8k) = 13i + 17j + 4k.$$

8. 求平行于向量  $a = (6, 7, -6)$  的单位向量.

解  $e_a = \pm \frac{1}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2}} (6, 7, -6) = \pm \left( \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11} \right).$

9. 设已知两点  $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$  和  $M_2(3, 0, 2)$ , 计算向量  $\overline{M_1M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

解  $\overline{M_1M_2} = (3, 0, 2) - (4, \sqrt{2}, 1) = (-1, -\sqrt{2}, 1), |\overline{M_1M_2}| = 2$ , 所以  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ .

10. 求与  $z$  轴反向, 模为 3 的向量  $a$  的坐标.

解  $a = (0, 0, -3).$

11. 点  $M$  的向径与  $x$  轴成  $45^\circ$  角, 与  $y$  轴成  $60^\circ$  角, 长度为 6, 若在  $z$  轴上的坐标是负值, 求点  $M$  的坐标.

解 设  $\overline{OM} = (x, y, z)$ , 则  $|\overline{OM}| = 6$ , 由  $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{|\overline{OM}|} = \frac{x}{6}$ , 得  $x = 3\sqrt{2}$ ; 由  $\cos \beta = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{y}{|\overline{OM}|} = \frac{y}{6}$ , 得  $y = 3$ ; 又  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 得  $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos \gamma = -\frac{1}{2} = \frac{z}{|\overline{OM}|} = \frac{z}{6}$ , 得  $z = -3$ ; 所以点  $M$  的坐标为  $(3\sqrt{2}, 3, -3)$ .

12. 已知三个力  $F_1 = i + 2j + 3k$ ,  $F_2 = -2i + 3j - 4k$ ,  $F_3 = 3i - 4j + 5k$  作用于同一点, 求合力  $F$  的大小及方向余弦.

解 合力  $F = F_1 + F_2 + F_3 = (1, 2, 3) + (-2, 3, -4) + (3, -4, 5) = (2, 1, 4)$ ; 合力  $F$  的大小  $|F| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$ , 合力  $F$  的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}, \cos \beta = \frac{\sqrt{21}}{21}, \cos \gamma = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

## 7.2 数量积 向量积

### 7.2.1 知识点分析

#### 1. 数量积

(1) 定义  $a \cdot b = |a||b|\cos \theta$ , 其中  $\theta$  为向量  $a$  与  $b$  的夹角.

(2) 非零向量  $a \perp b$  的充分必要条件是  $a \cdot b = 0$ .

(3)  $a \cdot a = |a|^2$ .

(4) 数量积的坐标表达式 设  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ,  $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ .

(5) 用投影表示数量积 当  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ ; 当  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ .

## 2. 向量积

(1) 定义  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  的大小  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  的方向与向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  都垂直, 按照右手规则确定.

(2) 设  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  为两非零向量, 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  的充分必要条件是  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

(3) 向量积的坐标表达式 设  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

(4) 反交换律  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ .

(5) 几何意义  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  表示以向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积.

## 7.2.2 典例解析

### 1. 数量积、向量积的运算

例 1 已知  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, -2)$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角,  $\mathbf{b}$  在  $\mathbf{a}$  上的投影.

解 根据数量积、向量积的坐标运算公式, 得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-2) = -1; \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 2, 1);$$

$$\cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \quad \text{故 } (\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{15}\right);$$

$$\text{由 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \text{ 得 } \text{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

点拨 掌握数量积、向量积坐标运算公式, 特别是把向量积在形式上表示成三阶行列式, 利用展开三阶行列式的方法求出向量积.

例 2 已知向量  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  为三个非零向量, 且  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ,  $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{c}}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) = \frac{\pi}{6}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$ ,  $|\mathbf{c}| = 3$ , 求  $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|$ .



解 由已知得  $a \cdot b = 0$ ,  $a \cdot c = |a||c|\cos(\hat{a}, \hat{c}) = \frac{3}{2}$ ,  $b \cdot c = |b||c|\cos(\hat{b}, \hat{c}) = 3\sqrt{3}$ ; 由于

$$\begin{aligned} |a+b+c|^2 &= (a+b+c) \cdot (a+b+c) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2a \cdot c \\ &= 1 + 4 + 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 17 + 6\sqrt{3}, \end{aligned}$$

从而  $|a+b+c| = \sqrt{17+6\sqrt{3}}$ .

点拨 利用数量积的性质  $a \cdot a = |a|^2$  来求向量的模.

例3 设向量  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (-3, 2, 4)$ ,  $c = (1, 0, -2)$ , 且  $m = (2a+b) \times (c-a) + (b+c) \times (a+b)$ , 求向量  $m$  的模.

解 先利用向量积的运算规律简化向量  $m$ .

$$m = (2a+b) \times (c-a) + (b+c) \times (a+b) = 2a \times c + b \times c - b \times a + b \times a + c \times a + c \times b = a \times c,$$

$$\text{所以 } m = a \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 5, -2), \text{ 从而 } |m| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

例4 设向量  $a = (2, -3, 1)$ ,  $b = (1, -2, 3)$ ,  $c = (2, 1, 2)$ , 向量  $r$  满足  $r \perp a$ ,  $r \perp b$ ,  $\text{Prj}_c r = 14$ , 求向量  $r$ .

$$\text{解 由 } r \perp a, r \perp b, \text{ 可知 } r \text{ 与 } a \times b \text{ 平行, 且 } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-7, -5, -1),$$

从而设  $r = k(a \times b) = k(-7, -5, -1)$ , 由  $\text{Prj}_c r = \frac{r \cdot c}{|c|} = \frac{-21k}{3} = -7k = 14$ , 得  $k = -2$ , 故  $r = (14, 10, 2)$ .

## 2. 利用向量积求面积

例5 设  $|a| = 4$ ,  $|b| = 3$ , 向量  $a$  与  $b$  的夹角是  $\frac{\pi}{6}$ , 求以  $a+2b$  和  $a-3b$  为邻边的平行四边形的面积.

解 设所求的平行四边形的面积为  $S$ , 则

$$S = |(a+2b) \times (a-3b)| = 5|a \times b| = 5|a||b|\sin(\hat{a}, \hat{b}) = 5 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30.$$

点拨 平行四边形的面积可以表示为两邻边所在向量的向量积的模, 三角形的面积为两边所在向量的向量积的模的一半.

### 7.2.3 习题解答

1. 已知  $a = 2i - 3j + k$ ,  $b = i - j + 3k$ , 求:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \quad (2) (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}; \quad (3) \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad (4) \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}).$$

解 (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 2 + 3 + 3 = 8.$

$$(2) (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = [(2, -3, 1) + 2(1, -1, 3)] \cdot (2, -3, 1) \\ = (4, -5, 7) \cdot (2, -3, 1) = 8 + 15 + 7 = 30.$$

$$(3) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -5, 1).$$

$$(4) \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{8}{\sqrt{14} \sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{154}}{77}.$$

2. 设力  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  作用在一质点上, 质点由  $M_1(1, 1, 2)$  沿直线移动到  $M_2(3, 4, 5)$ , 求此力所做的功(设力的单位为 N, 位移的单位为 m).

解 位移  $\overline{M_1 M_2} = (3, 4, 5) - (1, 1, 2) = (2, 3, 3);$

所做的功  $W = \mathbf{F} \cdot \overline{M_1 M_2} = (2, -3, 5) \cdot (2, 3, 3) = 10 \text{ (J)}.$

3. 已知  $M_1(1, -1, 2)$ ,  $M_2(3, 3, 1)$  和  $M_3(3, 1, 3)$ , 求同时与  $\overline{M_1 M_2}$ ,  $\overline{M_2 M_3}$  垂直的单位向量.

解 设所求单位向量为  $\mathbf{e}$ ,  $\overline{M_1 M_2} = (2, 4, -1)$ ,  $\overline{M_2 M_3} = (0, -2, 2)$ , 则

$$\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_2 M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4);$$

由条件可知  $\mathbf{e} \perp \overline{M_1 M_2}$ ,  $\mathbf{e} \perp \overline{M_2 M_3}$ , 故

$$\mathbf{e} = \pm \frac{\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_2 M_3}}{|\overline{M_1 M_2} \times \overline{M_2 M_3}|} = \pm \frac{(6, -4, -4)}{2\sqrt{17}} = \pm \frac{\sqrt{17}}{17} (3, -2, -2).$$

4. 求向量  $\mathbf{a} = (4, -3, 4)$  在向量  $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$  上的投影.

解  $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{3} = 2.$

5. 求与向量  $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$  平行, 且满足  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$  的向量  $\mathbf{b}$ .

解 设  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \lambda(1, 2, 2) = (\lambda, 2\lambda, 2\lambda)$ , 由  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 2) \cdot (\lambda, 2\lambda, 2\lambda) = 9\lambda = 12$ ,

得  $\lambda = \frac{4}{3}$ , 所以  $\mathbf{b} = \frac{4}{3}(1, 2, 2).$

6. 已知向量  $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (1, -2, 0)$ , 求  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ .

$$\text{解 } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, -5, 1), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-8, -5, 1) \cdot (1, -2, 0) = 2.$$

7. 已知  $|\mathbf{a}| = 3$ ,  $|\mathbf{b}| = 26$ ,  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 72$ , 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

解 因为  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta = 72$ , 所以  $\sin \theta = \frac{72}{3 \times 26} = \frac{12}{13}$ , 从而  $\cos \theta = \pm \frac{5}{13}$ ,

$$\text{故 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta = 3 \times 26 \times \left( \pm \frac{5}{13} \right) = \pm 30.$$

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 设圆方程为  $x^2 + y^2 = r^2$ , 圆与  $x$  轴的交点设为  $A, B$ , 在圆上任取一点  $C$ , 连接  $AC, BC, OC$ , 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (-\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = -r^2 + r^2 = 0, \end{aligned}$$

从而  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ , 即直径  $AB$  所对的圆周角是直角.

9. 求以  $A(3, 0, 2)$ ,  $B(5, 2, 1)$ ,  $C(0, -1, 3)$  为顶点的三角形的面积.

$$\text{解 由 } \overrightarrow{AB} = (2, 2, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (-3, -1, 1), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 4), \quad \text{因此}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(1, 1, 4)| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

10. 求以  $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 1, 2)$  为邻边的平行四边形的面积.

$$\text{解 平行四边形的面积 } S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -2, 1), \quad \text{所以}$$

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{6}.$$

## 7.3 曲面及其方程

### 7.3.1 知识点分析

#### 1. 曲面方程的概念

在空间直角坐标系中, 若曲面  $S$  上任一点的坐标都满足方程  $F(x, y, z) = 0$ , 而不在曲面  $S$  上的点的坐标都不满足该方程, 则方程  $F(x, y, z) = 0$  称为曲面  $S$  的方

程, 而曲面  $S$  就称为方程  $F(x, y, z) = 0$  的图形.

## 2. 旋转曲面

(1) **定义** 一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面. 这条平面曲线和定直线分别称为旋转曲面的母线和旋转轴.

(2) **旋转曲面方程的求法** 将  $yOz$  面上的曲线  $f(y, z) = 0$  绕  $z$  轴旋转一周所得旋转曲面方程为  $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ , 绕  $y$  轴旋转一周所得旋转曲面方程为  $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ .

$xOy$  面上的曲线绕  $x$  轴或  $y$  轴旋转,  $zOx$  面上的曲线绕  $x$  轴或  $z$  轴旋转, 都可以用类似的方法进行讨论.

## 3. 柱面

(1) **定义** 平行于定直线的直线  $L$  沿曲线  $C$  平行移动所形成的轨迹称为柱面. 曲线  $C$  称为柱面的准线, 直线  $L$  称为柱面的母线.

(2) 一般地, 在空间解析几何中, 不含  $z$  而仅含  $x, y$  的方程  $F(x, y) = 0$  表示母线平行于  $z$  轴的柱面,  $xOy$  面上的曲线  $F(x, y) = 0$  是这个柱面的一条准线.

同理, 不含  $y$  而仅含  $x, z$  的方程  $G(x, z) = 0$  表示母线平行于  $y$  轴的柱面; 不含  $x$  而仅含  $y, z$  的方程  $H(y, z) = 0$  表示母线平行于  $x$  轴的柱面.

## 4. 常见的二次曲面及其方程

(1) 球面  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ , 表示球心在  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 半径为  $R$  的球面.

(2) 圆锥面  $z^2 = \cot^2 \alpha (x^2 + y^2)$ , 表示顶点在坐标原点, 旋转轴为  $z$  轴, 半顶角为  $\alpha$  的圆锥面.

(3) 旋转抛物面  $z = a(x^2 + y^2)$ , 表示  $xOz$  坐标面上的抛物线  $z = ax^2$  绕  $z$  轴旋转一周所生成的旋转曲面.

(4) 圆柱面  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , 表示母线平行于  $z$  轴, 准线为  $xOy$  面上的圆  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  的圆柱面.

## 7.3.2 典例解析

### 1. 曲面方程及其图形的判断

**例 1** 动点  $M$  到点  $B(-4, 2, 4)$  的距离是到点  $A(5, 4, 0)$  距离的两倍, 求动点  $M$  的轨迹方程, 并说明表示什么曲面.

**解** 设动点  $M(x, y, z)$ , 由已知  $|MB| = 2|MA|$ , 得

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2 + z^2},$$

整理得  $(x-8)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{404}{9}$ , 从而动点  $M$  的轨迹方程为

$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{404}{9},$$

表示以  $\left(8, \frac{14}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  为球心, 半径为  $\frac{2\sqrt{101}}{3}$  的球面.

**例2** 二次方程  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$  的二次项系数不全为0时, 必定表示二次曲面吗?

**解** 不一定表示二次曲面. 例如, 二次方程  $x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz = 0$ , 把方程变形为  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ , 即  $x=y=z$ , 表示一条直线. 再例如二次方程  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ , 表示原点  $(0,0,0)$ .

**例3** 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形.

(1)  $x=2$ ; (2)  $x^2 + y^2 = 9$ ; (3)  $y=2x+1$ .

**解** (1)  $x=2$  在平面解析几何中表示平行于  $y$  轴的直线, 在空间解析几何中表示平行于  $yOz$  面的平面.

(2)  $x^2 + y^2 = 9$  在平面解析几何中表示圆心在  $(0,0)$ , 半径为3的圆; 在空间解析几何中表示母线平行于  $z$  轴的圆柱面.

(3)  $y=2x+1$  在平面解析几何中表示斜率为2的直线, 在空间解析几何中表示平行于  $z$  轴的平面.

## 2. 旋转曲面方程的求法

**例4** 将曲线  $C: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周, 求所得旋转曲面的方程.

**解** 绕  $y$  轴旋转, 曲线方程中的坐标  $y$  保持不变, 坐标  $x$  用  $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$  代换, 得  $(\pm\sqrt{x^2 + z^2} - 2)^2 + y^2 = 1$ , 即  $16(x^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2$  为所求的旋转曲面的方程.

**点拨** 掌握曲线绕坐标轴旋转所得旋转曲面方程的特点.

### 7.3.3 习题解答

1. 求以点  $(3, -2, 5)$  为球心, 半径为3的球面方程.

**解**  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 9$ .

2. 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$  表示什么曲面?

**解** 将  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$  配方, 得  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$ , 表示以

(1, -2, 0) 为球心, 半径为  $\sqrt{5}$  的球面.

3. 一动点与两定点  $A(1, 2, 3)$  和  $B(2, -1, 4)$  等距离, 求该动点的轨迹方程.

解 设动点为  $P(x, y, z)$ , 则由题意知  $|PA|^2 = |PB|^2$ , 即有

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2,$$

化简得  $2x - 6y + 2z - 7 = 0$ .

4. 将  $xOz$  面上的抛物线  $z = 4x^2$  绕  $z$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 所求旋转曲面方程为  $z = 4(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2$ , 即  $z = 4(x^2 + y^2)$ .

5. 将  $xOy$  坐标面上的直线  $y = 2x$  绕  $x$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 所求旋转曲面方程为  $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = 2x$ , 即  $y^2 + z^2 = 4x^2$ .

6. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形.

(1)  $y = 0$ ; (2)  $y = 2x + 1$ ; (3)  $x^2 + y^2 = 9$ ; (4)  $x^2 - y^2 = 4$ .

解

| 方程                  | 平面解析几何          | 空间解析几何           |
|---------------------|-----------------|------------------|
| (1) $y = 0$         | 平面上的 $x$ 轴      | 空间中的 $xOz$ 坐标面   |
| (2) $y = 2x + 1$    | 斜率为 2 的直线       | 平行于 $z$ 轴的平面     |
| (3) $x^2 + y^2 = 9$ | 圆心在原点, 半径为 3 的圆 | 母线平行于 $z$ 轴的圆柱面  |
| (4) $x^2 - y^2 = 4$ | 双曲线             | 母线平行于 $z$ 轴的双曲柱面 |

7. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ ; (2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ; (3)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

解 (1)  $xOy$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周得到; 或者  $xOz$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周得到.

(2)  $xOy$  面上的双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周得到; 或者  $yOz$  面上的双曲线  $z^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周得到.

(3)  $xOz$  面上的双曲线  $x^2 - z^2 = 1$  绕  $z$  轴旋转一周得到; 或者  $yOz$  面上的双曲线  $y^2 - z^2 = 1$  绕  $z$  轴旋转一周得到.

8. 指出下列方程各表示什么曲面.

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1; \quad (2) 3x^2 + 5y^2 = z^2; \quad (3) z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(4) y = 2x^2; \quad (5) x^2 + y^2 - 2z = 0; \quad (6) \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1.$$

解 (1) 旋转椭球面; (2) 椭圆锥面; (3) 圆锥面的上半部分; (4) 母线平行于  $z$  轴的抛物柱面; (5) 旋转抛物面; (6) 双叶双曲面.

9. 画出下列方程所表示的曲面.

$$(1) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(3) z = x^2 + y^2; \quad (4) \frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

解 (1) 如图 7.7 所示, 表示准线为  $xOy$  面上的圆  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ , 母线平行于  $z$  轴的圆柱面;

(2) 如图 7.8 所示, 表示顶点在  $(0,0,4)$ , 开口向下的圆锥面;

(3) 如图 7.9 所示, 表示顶点在  $(0,0,0)$ , 开口向上的旋转抛物面;

(4) 如图 7.10 所示, 表示顶点在  $(0,0,0)$ , 开口向上的椭圆抛物面.

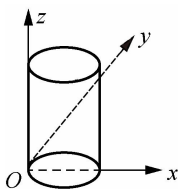


图 7.7

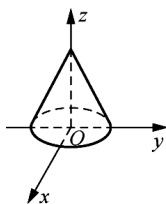


图 7.8

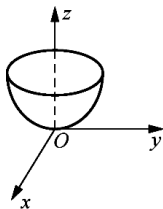


图 7.9

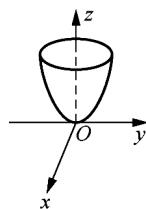


图 7.10

## 7.4 空间曲线及其方程

### 7.4.1 知识点分析

#### 1. 空间曲线的方程

(1) 一般方程  $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$  看作空间曲面  $F(x,y,z)=0$  和曲面  $G(x,y,z)=0$

的交线.

$$(2) \text{ 参数方程 } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \text{ 当给定 } t = t_1 \text{ 时, 就得到曲线上的一个点 } (x_1, y_1, z_1),$$

随着参数  $t$  的变化就可得到曲线上全部的点.

## 2. 空间曲线在坐标面上的投影柱面与投影

(1) **定义** 以曲线  $C$  为准线、母线平行于  $z$  轴的柱面称为曲线  $C$  关于  $xOy$  面的投影柱面. 投影柱面与  $xOy$  面的交线称为空间曲线  $C$  在  $xOy$  面上的投影曲线, 简称投影.

(2) **求法** 曲线  $C$  的一般方程为  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$  方程组消去变量  $z$  后所得的方程  $H(x, y) = 0$  为曲线  $C$  关于  $xOy$  面的投影柱面, 曲线  $\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$  表示曲线  $C$  在  $xOy$  面的投影. 曲线  $C$  在  $yOz$  面或  $zOx$  面上的投影柱面和投影的求法类似, 分别从上述方程组中消去  $x$  或  $y$  即可.

**注** 投影柱面是曲面, 其方程为三元方程; 而投影为曲线, 是投影柱面和坐标面的交线.

## 7.4.2 典例解析

### 1. 空间曲线的方程

**例 1** 方程组  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 3x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$  表示怎样的曲线?

**解** 方程组中的第一个方程表示母线平行于  $z$  轴的圆柱面, 第二个方程表示一个平面, 它在三个坐标轴上的截距依次是 2, 3, 3, 方程组表示上述圆柱面和平面的交线.

**例 2** 将曲线的一般方程  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  化为参数方程.

**解** 由第二个方程  $x + y + z = 0$  得  $z = -x - y$ , 代入第一个方程, 得  $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 1$ , 即  $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ , 配方得  $\frac{3}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 = 1$ ; 令  $x + y = \frac{\sqrt{6}}{3} \cos t$ ,  $x - y = \sqrt{2} \sin t$ , 得所求的参数方程为



$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t, \\ z = -\frac{\sqrt{6}}{3} \cos t. \end{cases}$$

**点拨** 求曲线的参数方程时, 根据方程组的特点消去一个变量, 化成两个变量的方程, 再根据圆或者椭圆的参数方程得出所求曲线的参数方程.

## 2. 空间曲线在坐标面上的投影

**例3** 求曲线  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y + z = 1 \end{cases}$  在  $xOy$  坐标面上的投影.

**解** 从已知方程组中消去变量  $z$  后, 得  $x^2 + y^2 = 1 - y$ , 从而  $\begin{cases} x^2 + y^2 + y = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  为曲线  $C$  在  $xOy$  面上的投影.

**点拨** 对于曲线在坐标面的投影, 消去相应的变量即可, 要注意是求投影还是投影柱面.

**例4** 求由曲面  $z = 2(x^2 + y^2)$  与曲面  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  所围立体在  $xOy$  坐标面上的投影.

**解** 两曲面的交线为  $\begin{cases} z = 2(x^2 + y^2), \\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$  消去变量  $z$ , 得  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , 从而旋转抛物面和圆锥面的交线在  $xOy$  面上的投影为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ z = 0, \end{cases}$  故所围立体在  $xOy$  面上的投影为  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \\ z = 0. \end{cases}$

**点拨** 立体在坐标面的投影是一个平面区域; 以后学习重积分和曲面积分的计算中, 需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影, 就要利用投影柱面或投影曲线.

### 7.4.3 习题解答

1. 下列方程组在平面解析几何和空间解析几何中各表示什么图形?

$$(1) \begin{cases} y = 5x + 3, \\ y = 2x - 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

解 (1) 在平面解析几何中, 方程组表示两直线的交点; 在空间解析几何中表示两平面的交线; (2) 在平面解析几何中, 方程组表示椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  与直线  $x = 3$  的交点; 在空间解析几何中表示椭圆柱面  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  与平面  $x = 3$  的交线.

2. 画出下列曲线在第 I 卦限内的图形.

$$(1) \begin{cases} x = 1, \\ y = 4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ x - y = 0; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

解 (1) 如图 7.11 所示, 表示平面  $x = 1$  与平面  $y = 4$  的交线;

(2) 如图 7.12 所示, 表示上半球面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  与平面  $x - y = 0$  的交线;

(3) 如图 7.13 所示, 表示两个圆柱面的交线.

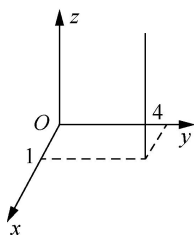


图 7.11

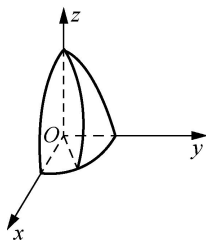


图 7.12

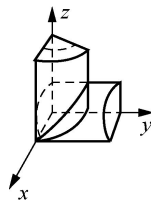


图 7.13

3. 求通过曲线  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$  且母线分别平行于  $x$  轴及  $y$  轴的柱面方程.

解 方程组消去  $x$ , 得母线平行于  $x$  轴的柱面方程  $3y^2 - z^2 = 16$ ;

方程组消去  $y$ , 得母线平行于  $y$  轴的柱面方程  $3x^2 + 2z^2 = 16$ .

4. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + z = 1 \end{cases}$  在  $xOy$  面上的投影方程.

解 消去  $z$  得投影柱面  $2x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ , 从而在  $xOy$  面上的投影曲线的方程为  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

5. 将曲线的一般方程  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = x \end{cases}$  化为参数方程.

解 消去  $y$  得  $2x^2 + z^2 = 4$ , 即  $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ , 故所求的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = x = \sqrt{2} \cos t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \\ z = 2 \sin t. \end{cases}$$

6. 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 4$ ) 在三个坐标面上的投影.

解 该曲面在  $xOy$  面的投影柱面为  $x^2 + y^2 = 4$ , 故它在  $xOy$  面上的投影为圆域  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ z = 0; \end{cases}$  同理, 在  $yOz$  面的投影为  $\begin{cases} y^2 \leq z \leq 4, \\ x = 0; \end{cases}$  在  $xOz$  面的投影为  $\begin{cases} x^2 \leq z \leq 4, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求两个椭圆抛物面  $z = x^2 + 2y^2$  与  $z = 6 - 2x^2 - y^2$  所围成的立体在  $xOy$  坐标面的投影.

解 两个椭圆抛物面的交线为  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 6 - 2x^2 - y^2, \end{cases}$  消去方程组中  $z$  得投影柱面  $x^2 + y^2 = 2$ , 从而交线在  $xOy$  面的投影为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0, \end{cases}$  故立体在  $xOy$  面的投影区域为  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ z = 0. \end{cases}$

## 7.5 平面及其方程

### 7.5.1 知识点分析

#### 1. 平面的三种方程

(1) 点法式方程  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ,  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  为平面的法线向量,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面上的已知点.

(2) 一般方程  $Ax + By + Cz + D = 0$ , 特别地:

当  $D = 0$ , 平面方程为  $Ax + By + Cz = 0$ , 表示通过原点的平面.

当  $A = 0$ , 平面方程为  $By + Cz + D = 0$ , 表示与  $x$  轴平行的平面; 方程  $Ax + Cz + D = 0$  和  $Ax + By + D = 0$  分别表示与  $y$  轴和  $z$  轴平行的平面.

当  $A = B = 0$ , 方程为  $Cz + D = 0$ , 方程表示与  $xOy$  面平行的平面. 方程  $Ax + D = 0$  和  $By + D = 0$  分别表示与  $yOz$  面和  $xOz$  面平行的平面.

(3) 截距式方程  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , 其中  $a, b, c$  分别叫作平面在  $x, y, z$  轴

上的截距.

## 2. 两平面的夹角

(1) 定义 两平面的夹角指两平面法线向量所夹的锐角.

(2) 夹角公式 设平面  $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ;  
 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ,  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , 则两平面的夹角  $\theta$  满足

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

## (3) 两平面位置关系的判定

若  $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$ , 即  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ , 则两平面垂直.

若  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ , 即  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ , 则两平面平行.

若  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ , 则两平面重合.

## 3. 点到平面的距离公式

设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  外一点, 则  $P_0$  到平面的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## 7.5.2 典例解析

### 1. 求平面的方程

例 1 求过三点  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(-2, -2, 2)$ ,  $C(1, -1, 2)$  的平面方程.

解法 1 设所求平面的方程为  $Ax + By + Cz + D = 0$ , 代入点  $A(1, 1, -1)$ ,

$$B(-2, -2, 2), C(1, -1, 2) \text{ 的坐标, 得 } \begin{cases} A + B - C + D = 0, \\ -2A - 2B + 2C + D = 0, \\ A - B + 2C + D = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} D = 0, \\ B = -3A, \\ C = -2A, \end{cases} \text{ 故所求}$$

平面的方程为  $x - 3y - 2z = 0$ .

解法 2 设所求平面的法线向量为  $\mathbf{n}$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 3)$ , 由已知条件得  $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}$  且  $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AC}$ , 故取  $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ , 则

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-3, 9, 6) \parallel (1, -3, -2),$$

故所求平面的方程为  $(x-1) - 3(y-1) - 2(z+1) = 0$ , 即  $x - 3y - 2z = 0$ .

点拨 点法式方程和一般方程是平面常用的两种方程, 求平面方程时根据具

体题目可以选择计算相对简便的一种.

**例2** 求通过点  $(1,2,1)$ , 且与两平面  $x+y=0$  和  $5y+z=0$  垂直的平面方程.

**解** 设所求平面的法线向量为  $\boldsymbol{n}$ ,  $\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$ ,  $\boldsymbol{n}_2=(0,5,1)$ , 则  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$  且  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_2$ ,

从而  $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 5)$ ; 故所求平面的方程为  $(x-1)-(y-2)+$

$5(z-1)=0$ , 即  $x-y+5z-4=0$ .

**点拨** 对于缺少变量的平面  $x+y=0$  和  $5y+z=0$ , 一定注意它们的法线向量.

## 2. 两平面的位置关系

**例3** 一平面通过  $x$  轴, 且与平面  $x-y=0$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 求此平面的方程.

**解** 设所求平面的方程为  $By+Cz=0$ , 法线向量  $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ , 已知平面的法线向量为  $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,0)$ , 由与平面  $x-y=0$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 得

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}| |\boldsymbol{n}_1|} = \frac{|-B|}{\sqrt{2} \sqrt{B^2 + C^2}},$$

解得  $B = \pm C$ , 代入  $By+Cz=0$  得所求平面的方程为  $y \pm z = 0$ .

**点拨** 平面通过  $x$  轴, 即与  $x$  轴平行, 从而  $A=0$ , 又过原点, 从而  $D=0$ .

**例4** 求与平面  $2x+y+2z+5=0$  平行, 且与三个坐标面构成的四面体体积为 1 的平面方程.

**解** 设所求平面的方程为  $2x+y+2z+D=0$  ( $D \neq 0$ ), 化为截距式方程为

$$\frac{x}{-\frac{D}{2}} + \frac{y}{-D} + \frac{z}{-\frac{D}{2}} = 1;$$

从而  $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \left| \left( -\frac{D}{2} \right) \cdot (-D) \cdot \left( -\frac{D}{2} \right) \right| = \frac{1}{24} |D|^3$ , 即  $\frac{1}{24} |D|^3 = 1$ , 得  $D = \pm 2\sqrt[3]{3}$ , 故所求平面的方程为  $2x+y+2z \pm 2\sqrt[3]{3} = 0$ .

**例5** 已知平面  $(l-3)x+(m+1)y+(n-4)z+8=0$  与平面  $(m+2)x+(n-9)y+(l+1)z-16=0$  表示同一平面, 求  $l, m, n$ .

**解** 两平面表示同一平面, 即所有系数对应成比例, 即  $\frac{l-3}{m+2} = \frac{m+1}{n-9} = \frac{n-4}{l+1} = \frac{8}{-16}$ , 解得  $l=1, m=2, n=3$ .

## 3. 点到平面的距离

**例6** 求两个平行平面  $19x-4y+8z+21=0$  与  $19x-4y+8z+42=0$  之间的距离.

解 在平面  $19x - 4y + 8z + 21 = 0$  上取一点  $P\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ , 所求两个平行平面之间的距离相当于点  $P\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$  到平面  $19x - 4y + 8z + 42 = 0$  的距离. 由点到平面的距离公式, 得  $d = \frac{21}{\sqrt{19^2 + (-4)^2 + 8^2}} = 1$ , 即两平行平面的距离为 1.

### 7.5.3 习题解答

1. 指出下列平面的位置特点.

(1)  $x = 2$ ; (2)  $5y - 2 = 0$ ; (3)  $4x - 3y - 6 = 0$ ; (4)  $3x + 5y - z = 0$ .

解 (1) 平行于  $yOz$  面; (2) 平行于  $xOz$  面; (3) 平行于  $z$  轴; (4) 过原点.

2. 求过三点  $M_1(2, -1, 4)$ ,  $M_2(-1, 3, -2)$ ,  $M_3(0, 2, 3)$  的平面的方程.

解  $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$ , 设所求平面的法向量为  $\boldsymbol{n}$ , 则

$$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \text{ 且 } \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_3}, \text{ 故取 } \boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (14, 9, -1), \text{ 所求平}$$

面的方程为  $14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$ , 即  $14x + 9y - z - 15 = 0$ .

3. 求过点  $(2, 1, 0)$  且与平面  $2x + 3y - 5z - 5 = 0$  平行的平面方程.

解 设所求平面的方程为  $2x + 3y - 5z + D = 0$ , 又过点  $(2, 1, 0)$ , 代入得  $D = -7$ , 故所求平面的方程为  $2x + 3y - 5z - 7 = 0$ .

4. 求过点  $(-2, 3, 0)$ , 且与两平面  $x + 2y + 3z - 2 = 0$  和  $6x - y + 5z + 2 = 0$  垂直的平面方程.

解 设所求平面的法向量为  $\boldsymbol{n}$ ,  $\boldsymbol{n}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\boldsymbol{n}_2 = (6, -1, 5)$ , 由题意可知,  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$

$$\text{且 } \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_2, \text{ 故取 } \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (13, 13, -13) \parallel (1, 1, -1), \text{ 故所求平面的方程为}$$

$(x+2) + (y-3) - z = 0$ , 即  $x + y - z - 1 = 0$ .

5. 分别按下列条件求平面方程.

(1) 平行于  $yOz$  面且经过点  $(1, 2, 3)$ ;

(2) 通过  $y$  轴和点  $(3, 2, -1)$ ;

(3) 平行于  $x$  轴且经过两点  $(4, 0, -2)$  和  $(5, 1, 7)$ .

解 (1) 取该平面的法向量为  $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ , 由点法式方程可得平面方程为

$x - 1 = 0$ .

(2) 设所求平面方程为  $Ax + Cz = 0$ , 把点  $(3, 2, -1)$  代入方程得  $3A - C = 0$ , 即

$C=3A$ , 即所求平面的方程为  $x+3z=0$ .

(3) 设所求平面方程为  $By+Cz+D=0$ , 把两点  $(4,0,-2)$  和  $(5,1,7)$  代入方程得

$$\begin{cases} -2C+D=0, \\ B+7C+D=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} D=2C, \\ B=-9C; \end{cases} \text{ 故所求平面的方程为 } 9y-z-2=0.$$

6. 一平面过点  $(1,0,-1)$  且平行于向量  $\mathbf{a}=(2,1,1)$  和  $\mathbf{b}=(1,-1,0)$ , 求该平面的方程.

解 设所求平面的法向量为  $\mathbf{n}$ , 则  $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$  且  $\mathbf{n} \perp \mathbf{b}$ , 取

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面的方程为  $(x-1)+(y-0)-3(z+1)=0$ , 即  $x+y-3z-4=0$ .

7. 确定  $k$  的值, 使平面  $x+ky-2z-9=0$  符合下列条件.

(1) 与平面  $2x+4y+3z-3=0$  垂直;

(2) 与平面  $3x-7y-6z-1=0$  平行;

(3) 在  $y$  轴上的截距为  $-3$ .

解 设平面  $x+ky-2z-9=0$  的法向量为  $\mathbf{n}$ , 则  $\mathbf{n}=(1,k,-2)$ .

(1)  $\mathbf{n}_1=(2,4,3)$ ,  $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1$ , 则  $2+4k-6=0$ , 即  $k=1$ .

(2)  $\mathbf{n}_2=(3,-7,-6)$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_2$ , 则  $\frac{1}{3}=\frac{k}{-7}=\frac{-2}{-6}$ , 即  $k=-\frac{7}{3}$ .

(3)  $x+ky-2z-9=0$  变形为  $\frac{x}{9}+\frac{y}{\frac{9}{k}}-\frac{z}{\frac{9}{2}}=1$ , 即  $\frac{9}{k}=-3$ , 故  $k=-3$ .

8. 确定以下各组平面的位置关系.

(1)  $\Pi_1: -x+3y-z+1=0$ ,  $\Pi_2: y+3z-4=0$ ;

(2)  $\Pi_1: 2x-y+z-1=0$ ,  $\Pi_2: -4x+2y-2z-1=0$ ;

(3)  $\Pi_1: 2x-2y+z+5=0$ ,  $\Pi_2: z=0$ .

解 (1)  $\mathbf{n}_1=(-1,3,-1)$ ,  $\mathbf{n}_2=(0,1,3)$ ,  $\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}=0$ , 故两平面垂直.

(2)  $\mathbf{n}_1=(2,-1,1)$ ,  $\mathbf{n}_2=(-4,2,-2)$ ,  $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$ , 从而  $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ , 故两平面平行; 而  $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$ , 故两平面平行但不重合.

(3)  $\mathbf{n}_1=(2,-2,1)$ ,  $\mathbf{n}_2=(0,0,1)$ ,  $\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}=\frac{1}{3}$ , 故两平面相交.

9. 求点  $(2,1,1)$  到平面  $x+y-z+1=0$  的距离.

解 由  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , 可得  $d = \frac{|2+1-1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$ .

## 7.6 空间直线及其方程

### 7.6.1 知识点分析



空间直线一般式方程



空间直线的点向式和参数方程

#### 1. 直线的三种方程

(1) 一般方程  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  可看作两相交平面的交线.

(2) 点向式方程  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ , 其中  $s=(m,n,p)$  为直线的方向向量,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为直线上已知点.

(3) 参数方程  $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

注 根据实际题目的需要, 三种方程要会转化, 特别是会把直线的一般方程转化成点向式方程.

#### 2. 两直线的夹角

(1) 定义 两直线的夹角指两直线方向向量所夹的锐角.

(2) 夹角公式 设  $s_1=(m_1, n_1, p_1)$ ,  $s_2=(m_2, n_2, p_2)$  分别是直线  $L_1$ ,  $L_2$  的方向向量, 则两直线的夹角  $\theta$  满足

$$\cos \theta = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

#### (3) 两直线位置关系的判定

若  $s_1 \perp s_2$ , 即  $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ , 则两直线垂直;

若  $s_1 \parallel s_2$ , 即  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ , 则两直线平行.

#### 3. 直线与平面的夹角

(1) 定义 当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线所夹的锐角称为直线与平面的夹角; 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为  $\frac{\pi}{2}$ .

(2) 夹角公式 设直线  $L$  的方向向量为  $s=(m,n,p)$ , 平面  $\Pi$  的法线向量为



$\mathbf{n}=(A,B,C)$ , 直线  $L$  与平面  $\Pi$  的夹角为  $\varphi$ , 则  $\sin \varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ .

注 直线和平面夹角公式是正弦, 要与两平面的夹角公式及两直线的夹角公式相区分.

### (3) 直线与平面位置关系的判定

若  $s \parallel \mathbf{n}$ , 即  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ , 则直线与平面垂直.

若  $s \perp \mathbf{n}$ , 即  $Am+Bn+Cp=0$ , 且直线上的一点满足平面的方程, 则直线在平面上; 直线上的一点不满足平面的方程, 则直线与平面平行.

### 4. 平面束 通过定直线 $L$ 的所有平面的全体

设空间直线  $L$  的一般方程为  $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$  则方程  $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$  称为过直线  $L$  的平面束方程, 其中  $\lambda$  为参数, 系数  $A_1, B_1, C_1$  与  $A_2, B_2, C_2$  不成比例.

注 上述平面束包含了除平面  $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$  之外的过直线  $L$  的所有平面.

## 7.6.2 典例解析

### 1. 求直线的方程

例1 一直线  $L$  通过点  $P(1,1,0)$  并与直线  $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$  垂直相交, 求直线  $L$  的方程.

解 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2+t, \\ z=5+4t, \end{cases}$  与直线  $L$  的交点设为  $Q(1+2t, 2+t, 5+4t)$ ,

则  $\overrightarrow{PQ}=(2t, t+1, 4t+5)$ , 直线  $l$  的方向向量  $\mathbf{s}_0=(2,1,4)$ , 则  $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{s}_0$ , 从而  $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{s}_0=0$ , 即  $4t+t+1+4(4t+5)=0$ , 解得  $t=-1$ , 从而交点  $Q(-1,1,1)$ ,  $\overrightarrow{PQ}=(-2,0,1)$ , 故所求直线的方程为  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ .

点拨 此题求直线  $L$  的方程, 关键是求两直线的交点. 与直线交点相关的题目一般利用直线的参数方程求解较方便.

### 2. 点、直线、平面的位置关系

例2 直线  $L$  的方程  $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$  中, 各系数满足什么条件时, 使

直线  $L$  (1) 经过原点; (2) 与  $y$  轴平行.

**解** (1) 如果直线  $L$  经过原点  $(0,0,0)$ , 则原点  $(0,0,0)$  满足直线方程, 代入直线方程得  $D_1 = 0, D_2 = 0$ .

(2) 设直线  $L$  的方向向量  $s$ , 则

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = (B_1C_2 - B_2C_1, A_2C_1 - A_1C_2, A_1B_2 - A_2B_1).$$

如果直线  $L$  与  $y$  轴平行, 则  $s$  与向量  $(0,1,0)$  平行, 即 
$$\begin{cases} B_1C_2 - B_2C_1 = 0, \\ A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0, \\ A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \end{cases}$$

上述方程组中的第一个和第三个方程可以看作关于变量  $B_1, B_2$  的线性方程组

$$\begin{cases} C_2B_1 - C_1B_2 = 0, \\ A_2B_1 - A_1B_2 = 0, \end{cases} \text{ 由系数行列式 } \begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} = A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0, \text{ 从而方程组}$$

$$\begin{cases} C_2B_1 - C_1B_2 = 0, \\ A_2B_1 - A_1B_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解, 即  $B_1 = B_2 = 0$ .

**例 3** 求点  $P(-1,2,0)$  关于平面  $x+2y-z+1=0$  的对称点  $N$ .

**解** 过点  $P(-1,2,0)$  作与平面  $x+2y-z+1=0$  垂直的直线  $L$ , 则  $L: \frac{x+1}{1} =$

$$\frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}, \text{ 其参数方程为 } \begin{cases} x = -1+t, \\ y = 2+2t, \\ z = -t. \end{cases}$$

设直线  $L$  与平面的交点为  $Q(-1+t, 2+2t, -t)$ , 把直线  $L$  的参数方程代入平面方程, 得  $(-1+t) + 2(2+2t) - (-t) + 1 = 0$ , 解得  $t = -\frac{2}{3}$ , 所以交点坐标为  $Q\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,

以交点  $Q$  作为点  $P(-1,2,0)$  和对称点  $N$  的中点, 从而对称点  $N\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .

**点拨** 求直线与平面的交点时, 利用直线的参数方程求解较方便.

**例 4** 判定直线  $L: \begin{cases} 2x+y-1=0, \\ 3x+z-2=0 \end{cases}$  与平面  $\Pi: x+2y-z-1=0$  的位置关系, 如

果平行, 求直线  $L$  与平面  $\Pi$  的距离.

**解** 直线  $L$  的方向向量为  $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3)$ , 平面  $\Pi$  的法线向量

$\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ , 由  $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}=0$  可得  $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$ , 取  $M(0,1,2) \in L$ , 但是  $M(0,1,2) \notin \Pi$ , 从而直线  $L$  与平面  $\Pi$  平行, 故直线  $L$  与平面  $\Pi$  的距离, 可看作点  $M(0,1,2)$  到平面  $\Pi$  的距离, 即  $d=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

**点拨** 如果直线与平面平行, 直线与平面的距离可以看作直线上任意一点到平面的距离.

**例 5** 求与直线  $l_1: \frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$  及  $l_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$  平行且过原点的平面方程.

**解** 设所求平面的法线向量为  $\boldsymbol{n}$ , 直线  $l_1$  及  $l_2$  的方向向量分别为  $\boldsymbol{s}_1=(0,1,1)$ ,  $\boldsymbol{s}_2=(1,2,1)$ , 则  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1$  且  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$ , 取  $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,1,-1)$ , 从而所求平面的方程为  $-x+y-z=0$ , 即  $x-y+z=0$ .

**例 6** 求点  $P(3,4,2)$  到直线  $l: \frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{7}$  的距离.

**解** 过点  $P(3,4,2)$  作与直线  $l: \frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{7}$  垂直的平面  $\Pi$ , 则  $\Pi: 6(x-3)+6(y-4)+7(z-2)=0$ , 即  $6x+6y+7z-56=0$ .

把直线  $l$  的方程化成参数方程为  $\begin{cases} x=1+6t, \\ y=2+6t, \\ z=3+7t, \end{cases}$  代入平面  $\Pi$ , 得

$$6(1+6t)+6(2+6t)+7(3+7t)-56=0,$$

即  $t=\frac{17}{121}$ , 从而直线  $l$  和平面  $\Pi$  的交点坐标为  $Q\left(1\frac{102}{121}, 2\frac{102}{121}, 3\frac{119}{121}\right)$ , 从而点  $P(2,4,3)$  到直线  $l$  的距离为

$$|PQ|=\sqrt{\left(3-1\frac{102}{121}\right)^2+\left(4-2\frac{102}{121}\right)^2+\left(2-3\frac{119}{121}\right)^2}=\frac{20\sqrt{2}}{11}.$$

**点拨** 求点到直线的距离, 可以过已知点作一个与已知直线垂直的平面, 求出直线与平面的交点, 即垂足, 已知点和垂足之间的距离即为所求.

### 3. 平面束的应用

**例 7** 求过点  $P(1,1,2)$  及直线  $L: \begin{cases} x+2y-1=0, \\ z=0 \end{cases}$  的平面方程.

**解** 设过直线  $L$  的平面束为  $(x+2y-1)+\lambda z=0$ , 又过点  $P(1,1,2)$ , 代入平面束

的方程, 得  $1+2-1+2\lambda=0$ , 即  $\lambda=-1$ , 故  $x+2y-z-1=0$ ; 经验证  $z=0$  不通过点  $P(1,1,2)$ , 不是所求方程, 从而所求的平面方程为  $x+2y-z-1=0$ .

**例 8** 求过直线  $L: \begin{cases} 3x-4y+6=0, \\ 2y+z-11=0 \end{cases}$  且与平面  $3x-4y+6=0$  垂直的平面方程.

**解** 设过直线  $L$  的平面束为  $(3x-4y+6)+\lambda(2y+z-11)=0$ , 即  $3x+(2\lambda-4)y+\lambda z+(6-11\lambda)=0$ , 法线向量  $\boldsymbol{n}=(3, 2\lambda-4, \lambda)$ .

平面  $3x-4y+6=0$  的法线向量为  $\boldsymbol{n}_1=(3, -4, 0)$ , 则  $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$ , 故  $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_1=0$ , 即  $9-4(2\lambda-4)=0$ , 解得  $\lambda=\frac{25}{8}$ , 代入平面束方程得  $3x+\frac{9}{4}y+\frac{25}{8}z-\frac{227}{8}=0$ , 即  $24x+18y+25z-227=0$ . 由于  $2y+z-11=0$  与平面  $3x-4y+6=0$  不垂直, 不是所求方程, 从而所求的平面方程为  $24x+18y+25z-227=0$ .

**点拨** 利用平面束来求平面或直线的方程是常用的一种方法, 一般涉及过某直线的平面时可以考虑用平面束.

### 7.6.3 习题解答

1. 求过两点  $M(2,3,0)$  和  $N(-1,1,2)$  的直线方程.

**解**  $\overrightarrow{MN}=(-3, -2, 2) \parallel (3, 2, -2)$ , 从而所求直线方程为  $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-2}$ .

2. 求过点  $(2, -1, 4)$  且平行于直线  $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$  的直线方程.

**解** 所求直线的方向向量为  $\boldsymbol{s}=(3, 1, 2)$ , 从而直线方程为  $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{2}$ .

3. 用对称式方程及参数方程表示直线  $\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$

**解** 两平面的法向量分别为  $\boldsymbol{n}_1=(1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{n}_2=(2, -1, 3)$ , 故所求直线的方向向量为  $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4, -1, -3)$ ; 在直线上取一点  $(1, 0, -2)$ , 则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}; \text{ 参数方程为 } \begin{cases} x=1+4t, \\ y=-t, \\ z=-2-3t. \end{cases}$$

4. 求过点  $(2, 0, -3)$  且与直线  $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$  垂直的平面方程.

解 所求平面的法线向量为  $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 14, 11)$ , 故平面方程

为  $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$ , 即  $16x-14y-11z-65=0$ .

5. 求直线  $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$  的夹角余弦.

解 两直线的方向向量分别为  $\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10) \parallel (2, -1, 2)$ ,

$\boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1)$ , 故两直线的夹角余弦为  $\cos \theta = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1| \cdot |\boldsymbol{s}_2|} = \frac{|6-4-2|}{3\sqrt{26}} = 0$ , 所

以  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 即两直线垂直.

6. 求过点  $(-3, 2, 5)$  且与两平面  $x-4z-3=0$  和  $2x-y-5z-1=0$  平行的直线方程.

解 所求直线的方向向量为  $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1) = -(4, 3, 1)$ , 从而直线

的方程为  $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$ .

7. 判断下列各组方程中的直线和平面间的位置关系.

(1)  $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{-3}$  和  $4x-2y-2z-3=0$ ;

(2)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$  和  $3x-2y+z-8=0$ ;

(3)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-4}$  和  $x+y+z-3=0$ .

解 (1)  $\boldsymbol{s} = (2, 7, -3)$ ,  $\boldsymbol{n} = (4, -2, -2)$ ,  $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ , 从而  $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$ , 把直线上的一点  $(0, -4, 0)$  代入平面方程不成立, 即直线上的点不在平面上, 从而直线与平面平行.

(2)  $\boldsymbol{s} = (3, -2, 1)$ ,  $\boldsymbol{n} = (3, -2, 1)$ ,  $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{n}$ , 即直线与平面垂直.

(3)  $\boldsymbol{s} = (3, 1, -4)$ ,  $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$ ,  $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ , 从而  $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$ , 即直线与平面平行, 把直线上的一点  $(1, 0, 2)$  代入平面方程成立, 即直线在平面上.

8. 求直线  $\begin{cases} x+y+3z=6, \\ x-y-z=0 \end{cases}$  与平面  $2x-y+1=0$  的夹角.

解 直线的方向向量  $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2)$ ; 平面的法线向量  $n = (2, -1, 0)$ ,

从而直线与平面夹角的正弦为  $\sin \theta = \frac{|s \cdot n|}{|s| \cdot |n|} = \frac{|2 \times 2 - 4 \times 1 + 0|}{\sqrt{24} \sqrt{5}} = 0$ , 从而直线与平面的

的夹角为 0.

9. 求直线  $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$  在平面  $x+y+z=0$  上的投影直线的方程.

解 设过直线的平面束为  $(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$ , 即  $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z+(\lambda-1)=0$ ,  $n=(1+\lambda, 1-\lambda, \lambda-1)$ ,  $n_1=(1, 1, 1)$ , 由  $n \perp n_1$ , 即  $n \cdot n_1=0$  得出  $\lambda=-1$ , 所求垂直平面为  $y-z-1=0$ , 故投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

## 复习题 7 解答

1. 已知  $a, b, c$  为单位向量, 且满足  $a+b+c=0$ , 计算  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ .

解 由

$$\begin{aligned} (a+b+c) \cdot (a+b+c) &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2c \cdot b \\ &= 3 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2c \cdot b = 0, \end{aligned}$$

即  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$ .

2. 设  $\triangle ABC$  的三边  $\overrightarrow{BC}=a$ ,  $\overrightarrow{CA}=b$ ,  $\overrightarrow{AB}=c$ , 三边中点依次为  $D, E, F$ , 证明  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ .

证明 如图 7.14 所示,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = c + \frac{1}{2}a$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = a + \frac{1}{2}b,$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = b + \frac{1}{2}c,$$

所以  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = c + \frac{1}{2}a + a + \frac{1}{2}b + b + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}(a+b+c) = 0$ .

3. 已知  $a \times b = (1, -2, 3)$ , 求  $(2a-3b) \times (4a-5b)$ .

解  $(2a-3b) \times (4a-5b) = 8a \times a - 10a \times b - 12b \times a + 15b \times b$   
 $= 2a \times b = 2(1, -2, 3) = (2, -4, 6).$

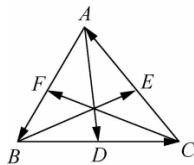


图 7.14

4. 已知  $|a|=2$ ,  $|b|=5$ ,  $(a, b) = \frac{2\pi}{3}$ , 则系数  $\lambda$  为何值时, 向量  $m = \lambda a + 17b$  与  $n = 3a - b$  垂直?

解 由  $m \perp n$  可得  $m \cdot n = 0$ , 即

$$\begin{aligned} (\lambda a + 17b) \cdot (3a - b) &= 3\lambda |a|^2 + (51 - \lambda)a \cdot b - 17|b|^2 \\ &= 12\lambda + 10(51 - \lambda)\cos\frac{2\pi}{3} - 17 \times 25 = 0, \end{aligned}$$

解得  $\lambda = 40$ .

5. 将  $xOy$  坐标面上的双曲线  $4x^2 - 9y^2 = 36$  分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕  $x$  轴:  $4x^2 - 9(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 36$ , 即  $4x^2 - 9y^2 - 9z^2 = 36$ .

绕  $y$  轴:  $4(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 - 9y^2 = 36$ , 即  $4x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 36$ .

6. 求过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$  且垂直于平面  $3x - y + 2z + 17 = 0$  的平面方程.

解 直线的方向向量为  $s = (2, 1, -1)$ , 平面的法向量为  $n_1 = (3, -1, 2)$ , 所求平面的法向量为  $n$ , 由条件可得  $n \perp s$  且  $n \perp n_1$ , 从而

$$n = s \times n_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -7, -5),$$

故所求平面的方程为  $(x-1) - 7(y-2) - 5(z-3) = 0$ , 即  $x - 7y - 5z + 28 = 0$ .

7. 求过点  $(-1, 0, 4)$  且平行于平面  $3x - 4y + z - 10 = 0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  相交的直线方程.

解 已知直线的参数方程为  $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t + 3, \\ z = 2t, \end{cases}$  平面的法向量为  $n = (3, -4, 1)$ , 所求直线的

方向向量为  $s = (t, t+3, 2t-4)$ , 由  $s \perp n$  得  $s \cdot n = 0$ , 即  $3t - 4(t+3) + (2t-4) = 0$ , 得  $t = 16$ , 故所求直线的方向向量为  $s = (16, 19, 28)$ , 方程为  $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$ .

8. 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与柱面  $z^2 = 2x$  所围立体在  $xOy$  面上的投影.

解 将方程组  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z^2 = 2x \end{cases}$  消去  $z$ , 得  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , 故该立体在  $xOy$  坐标

面上的投影区域为  $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \\ z = 0. \end{cases}$

## 单元练习 A

## 1. 选择题

- (1) 已知向量  $a = (3, 2, 2)$ ,  $b = (1, 0, 2)$ , 则  $2a \cdot (-3)b =$  ( ).  
 A. 40                      B. 41                      C. 42                      D. -42
- (2) 若两个非零向量  $a, b$  满足  $|a+b| = |a-b|$ , 则 ( ).  
 A.  $a$  与  $b$  垂直                      B.  $a$  与  $b$  平行  
 C.  $a$  与  $b$  的夹角是  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $a$  与  $b$  的夹角是  $\frac{\pi}{4}$
- (3) 方程  $z = 1 - x^2 - y^2$  所表示的曲面是 ( ).  
 A. 圆锥面                      B. 旋转抛物面  
 C. 球面                      D. 双曲抛物面
- (4) 直线  $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{-3}$  与平面  $4x - 2y - 2z = 3$  的位置关系为 ( ).  
 A. 平行但直线不在平面上                      B. 直线在平面上  
 C. 垂直相交                      D. 相交但不垂直
- (5) 曲线  $\begin{cases} z = e^{2x} \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转曲面方程为 ( ).  
 A.  $\sqrt{y^2 + z^2} = e^{2x}$                       B.  $y^2 + z^2 = e^{2x}$   
 C.  $z = e^{2(x^2+y^2)}$                       D.  $z = e^{2\sqrt{x^2+y^2}}$

## 2. 填空题

- (1) 设  $a \cdot b = 4$ ,  $a \times b = (2, 3, \sqrt{3})$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为\_\_\_\_\_.
- (2) 设  $a = (2, -1, 1)$ ,  $b = (1, 2, -1)$ , 则与  $a, b$  同时垂直的单位向量为\_\_\_\_\_.
- (3) 若球面的球心为  $(1, 3, -2)$ , 且球面通过坐标原点, 则球面的方程为\_\_\_\_\_.
- (4) 将  $xOz$  面的抛物线  $z^2 = 3x$  绕  $x$  轴旋转一周, 所得旋转曲面的方程为\_\_\_\_\_.
- (5) 过点  $(0, 1, 2)$  且与  $xOy$  面平行的平面方程为\_\_\_\_\_.
3. 设  $a = (1, 2, -3)$ ,  $b = (2, -3, k)$ ,  $c = (-2, l, 6)$ ,  
 (1) 若  $a$  与  $b$  垂直, 求  $k$ ; (2) 若  $a$  与  $c$  平行, 求  $l$ .
4. 已知动点  $M$  到  $xOy$  坐标面的距离与点  $M$  到点  $(1, -1, 2)$  的距离相等, 求动点  $M$  的轨迹方程.



5. 求球心在  $(1,2,3)$ , 且与平面  $x+y+z=0$  相切的球面方程.
6. 求过点  $(1,2,0)$  且与直线  $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$  垂直的平面方程.
7. 判定直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$  与平面  $2x+5y+4z-11=0$  的位置关系.
8. 求曲线  $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线方程.
9. 求过点  $P(1,2,3)$ , 与  $z$  轴相交, 且与直线  $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$  垂直的直线方程.

## 单元练习 B

### 1. 选择题

(1) 下列命题正确的是 ( ).

A.  $(a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2$

B.  $(a+b) \cdot (a-b) = |a|^2 - |b|^2$

C.  $a(a \cdot b) = |a|^2 b$

D.  $(a+b) \times (a-b) = a \times a - b \times b = 0$

(2) 设向量  $a$  与三个坐标面的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma =$  ( ).

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

(3) 旋转抛物面  $z=2(x^2+y^2)$  ( $0 \leq z \leq 8$ ), 在  $xOy$  面上的投影为 ( ).

A.  $z=4$

B.  $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ z=0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

D.  $z=0$

(4) 两平行平面  $2x-3y+4z+9=0$  与  $2x-3y+4z-15=0$  的距离为 ( ).

A.  $\frac{6}{29}$

B.  $\frac{24}{29}$

C.  $\frac{24}{\sqrt{29}}$

D.  $\frac{6}{\sqrt{29}}$

(5) 直线  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-3}$  与平面  $x+y+z-4=0$  的位置关系为 ( ).

A. 平行

B. 直线在平面上

C. 垂直

D. 三者都不是

### 2. 填空题

(1) 点  $P(1,2,1)$  关于  $xOy$  面的对称点的坐标为\_\_\_\_\_, 关于原点的对称点的坐标为\_\_\_\_\_.

(2) 设  $a=(1,2,3)$ ,  $b$  与  $a$  反向,  $|b|=2\sqrt{14}$ , 则  $b=$ \_\_\_\_\_.

(3) 曲线  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  在平面  $z = 2$  上的投影方程为\_\_\_\_\_.

(4) 将曲线  $\begin{cases} 2|y| + |z| = 2, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周, 所得的旋转曲面的方程为\_\_\_\_\_; 绕  $z$  轴旋转一周, 所得的旋转曲面的方程为\_\_\_\_\_.

(5) 直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$  与平面  $x - 3y + 2z - 5 = 0$  的夹角为\_\_\_\_\_.

3. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为三个非零向量, 满足  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ , 求它们之间的夹角及各自的模.

4. 求过点  $(-1, 2, 3)$ , 与平面  $7x + 8y + 9z + 10 = 0$  平行, 又与直线  $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$  垂直的直线方程.

5. 判定直线  $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$  和  $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$  的位置关系.

6. 一直线过点  $P(1, 0, 5)$ , 且与平面  $3x - y + 2z - 15 = 0$  平行, 又与直线  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$  相交, 求此直线方程.

7. 已知直线  $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$  和  $l_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ , 求过直线  $l_1$  且与直线  $l_2$  平行的平面方程.

8. 求过直线  $L: \begin{cases} x + 28y - 2z + 17 = 0, \\ 5x + 8y - z + 1 = 0 \end{cases}$  且与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  相切的平面方程.

## 单元练习 A 答案

### 1. 选择题

(1) D (2) A (3) B (4) A (5) A

### 2. 填空题

(1)  $\frac{\pi}{4}$  (2)  $\pm \frac{\sqrt{35}}{35}(-1, 3, 5)$  (3)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0$

(4)  $y^2 + z^2 = 3x$  (5)  $z - 2 = 0$

3. 解 (1) 由  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  垂直, 得  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , 即  $2 - 6 - 3k = 0$ , 得  $k = -\frac{4}{3}$ .

(2) 由  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{c}$  平行, 得  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{c}$  坐标对应分量成比例, 即  $\frac{1}{-2} = \frac{2}{l} = \frac{-3}{6}$ , 得  $l = -4$ .

4. 解 设  $M(x, y, z)$ , 则  $|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}$ , 整理得  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4z + 6 = 0$ .

5. 解 半径  $R = 2\sqrt{3}$ , 得球面的方程为  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$ .

6. 解 已知直线的方向向量  $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, 5, 3)$ , 从而所求平面的方程为

$2(x-1) + 5(y-2) + 3z = 0$ , 即  $2x + 5y + 3z - 12 = 0$ .

7. 解 由  $s = (3, 2, -4)$ ,  $n = (2, 5, 4)$ , 从而  $s \perp n$ , 从而直线与平面平行. 又直线上的点  $(2, -1, 3)$  满足平面的方程, 从而直线在平面上.

8. 解 先求曲线在  $xOy$  坐标面上的投影曲线的方程, 在所给的曲线方程中消去变量  $z$ , 得  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ , 从而曲线  $\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$  就是曲线

在  $xOy$  面上的投影曲线方程; 类似的方法消去变量  $y$ , 得  $\begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x + 3z + 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$  是曲线在  $xOz$  面上的投影曲线方程; 消去变量  $x$ ,

得  $\begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y + 3z + 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$  是曲线在  $yOz$  面上的投影曲线方程.

9. 解 设所求直线和  $z$  轴的交点为  $Q(0, 0, t)$ , 则  $\overrightarrow{PQ} = (-1, -2, t-3)$ ; 由  $s_0 = (3, 2, 1)$ ,  $\overrightarrow{PQ} \perp s_0$ , 得  $-3 - 4 + (t-3) = 0$ , 即  $t = 10$ ; 所以  $\overrightarrow{PQ} = (-1, -2, 7)$ , 从而所求直线的方程为  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{7}$ .

## 单元练习 B 答案

### 1. 选择题

(1) B (2) A (3) B (4) C (5) B

### 2. 填空题

(1)  $(1, 2, -1)$ ,  $(-1, -2, -1)$  (2)  $(-2, -4, -6)$  (3)  $\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \\ z = 2 \end{cases}$

(4)  $2|y| + \sqrt{x^2 + z^2} = 2$ ,  $2\sqrt{x^2 + y^2} + |z| = 2$  (5)  $\arcsin \frac{\sqrt{406}}{406}$

3. 解 由  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ , 可知  $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 故  $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = (\hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}) = (\hat{\mathbf{c}}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{\pi}{2}$ ; 再由  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \frac{\pi}{2} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ ,  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|$ ,  $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|$ , 得  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ .

4. 解 所求直线的方向向量  $\mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3(1, -2, 1)$ , 从而所求直线的方程

$$\text{为 } \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

5. 解 由  $\cos \theta = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0$ , 得  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 从而两直线垂直.

6. 解 设所求直线和已知直线的交点为  $Q(4t+1, 2t+2, t)$ , 则  $\overrightarrow{QP} = (4t, 2t+2, t-5)$ , 由  $\mathbf{n} = (3, -1, 2)$ ,  $\overrightarrow{QP} \perp \mathbf{n}$ , 得  $12t - (2t+2) + 2(t-5) = 0$ , 即  $t = 1$ , 所以  $\overrightarrow{QP} = (4, 4, -4)$ , 从而所求直线的方程为  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$ .

7. 解 所求平面的法线向量  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, 1)$ ; 又过点  $(1, 2, 3)$ ,

从而所求平面的方程为  $(x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0$ , 即  $x - 3y + z + 2 = 0$ .

8. 解 设过直线  $L$  的平面束为  $(x+28y-2z+17) + \lambda(5x+8y-z+1) = 0$ , 即  $(1+5\lambda)x + (28+8\lambda)y + (-2-\lambda)z + (17+\lambda) = 0$ , 球心  $(0, 0, 0)$  到平面的距离

$$d = \frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2 + (28+8\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2}} = 1,$$

即  $89\lambda^2 + 428\lambda + 500 = 0$ , 解得  $\lambda = -2$  或者  $\lambda = \frac{250}{89}$ ; 代入  $\lambda$ , 得所求的平面方程为

$3x - 4y - 5 = 0$  或者  $387x - 164y - 24z - 421 = 0$ . 经验证平面  $5x + 8y - z + 1 = 0$  不是所求平面. 故所求的平面方程为  $3x - 4y - 5 = 0$  或者  $387x - 164y - 24z - 421 = 0$ .