

第1章 变量与函数

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

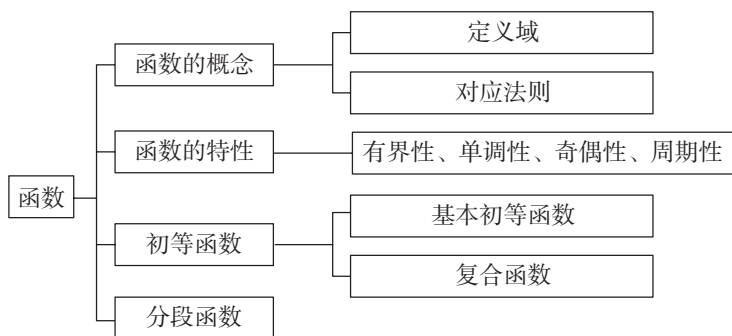
——马克思

【课前导学】

党的二十大报告提出，要实施科教兴国战略，强化现代化建设人才支撑。“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学”，数学是重大技术创新发展的基础，已成为航空航天、国防安全、生物医药、信息、能源、海洋、人工智能、先进制造等领域不可或缺的重要支撑。本课程将为我们展示数学作为工具，如何应用于解决大量实际问题。

人们在大自然中观察到的一切现象，都是物质运动不同形式的表现，而物质的变化总是受相应量的变化所制约的，只有通过研究事物量的变化，才能认识质的变化。而数学的一项重要任务就是找出反映各种实际问题中量的变化规律，即其中所蕴含的变量之间的函数关系。函数是数学中最基本的概念之一，是变量之间的最基本的一种依存关系。本章将学习函数的概念、特性以及基本初等函数、复合函数和初等函数的概念及其图形等。

【知识脉络】





1.1 区间、邻域



任务提出

随着科学技术的发展, 列车运行速度不断提高, 运行时速达 200 千米以上的旅客列车称为新时速旅客列车. 在北京与天津间运行时速达 350 千米的京津城际列车呈现出超越世界的“中国速度”, 使新时速旅客列车的运行速度值界定在 200 千米/小时与 350 千米/小时之间. 请用数学语言表示新时速旅客列车运行速度的范围.

解决问题知识要点: 用区间表示变量取值范围.



学习目标

理解区间的概念, 掌握用区间表示集合的方法.



知识学习

1.1.1 区间的概念

1. 有限区间

一个变量能取得的全部数值的集合, 称为这个变量的变化范围, 变化范围通常以区间的形式呈现.

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 则

- (1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫作开区间, 记作 (a, b) ;
- (2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫作闭区间, 记作 $[a, b]$;
- (3) 满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的一切实数 x 的集合叫作半开半闭区间, 记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.

以上区间称为有限区间, a, b 为区间端点, 有限区间右端点与左端点之差 $b - a$ 称为区间长. 这些区间在数轴上的表示, 如图 1-1 所示.

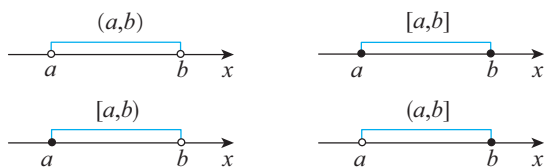


图 1-1

2. 无限区间

一切实数 R 可记为 $(-\infty, +\infty)$, 记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大),

$[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 分别表示满足 $x \geq a$, $x > a$, $x \leq b$, $x < b$ 的实数 x 的集合. 如图 1-2 所示.

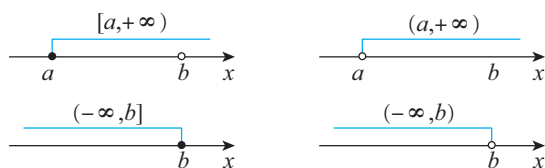


图 1-2

1.1.2 邻域的概念

设 a 与 δ 为两个实数, 且 $\delta > 0$, 则数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$$

其中 a 称作 $U(a, \delta)$ 的中心, δ 称作 $U(a, \delta)$ 的半径.

由于 $|x - a| < \delta$ 等价于 $-\delta < x - a < \delta$, 即 $a - \delta < x < a + \delta$, 因此, $U(a, \delta)$ 也就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 此区间以点 a 为中心, 长度为 2δ , 如图 1-3 (a) 所示.

有些问题的研究需去掉邻域中心, 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的去心邻域, 记作 $U^0(a, \delta)$, 即 $U^0(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$.

为了方便, 将开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左邻域, 开区间 $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右邻域, 如图 1-3 (b) 所示.

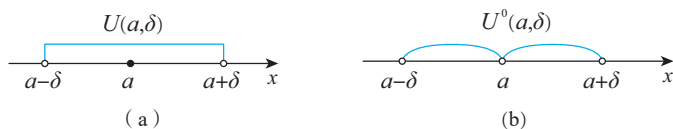


图 1-3

任务解决

解 新时速旅客列车运行速度值界定在 200 千米 / 小时与 350 千米 / 小时之间, 可以用以下数学语言表示:

不等式表示: $200 \leq v \leq 350$;

集合表示: $\{v | 200 \leq v \leq 350\}$;

数轴表示:

区间表示: $[200, 350]$.



能力训练 1.1



参考答案

1. 用描述法表示下列集合.

例: 方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集 B 可用描述法表示为 $B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$.

(1) 不小于 6 的所有实数的集合.

(2) 抛物线 $y = 3x^2$ 与直线 $y = 4$ 的交点的集合.

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内部 (不含椭圆边界) 的一切点的集合.

(4) 中心为 1, 半径为 3 的去心邻域.

2. 解下列不等式并用区间表示解集.

$$(1) -8 < \frac{-2x-1}{3} - 5 < 2$$

$$(2) |2x-3| > 5$$

$$(3) |3x+5| \leq 8$$

$$(4) x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$(5) x^2 + 4x + 4 \leq 0$$

$$(6) 12x^2 - 5x - 3 < 0$$

1.2 函数



任务提出

在一次物流公司的货运任务中, 一辆货车将货物从 A 地运往 B 地, 到达 B 地卸货后返回, 已知货车从 B 地返回 A 地的速度比从 A 地到 B 地的速度快 20 千米 / 小时. 假设货车从 A 地出发 t 小时, 货车距离 A 地的路程为 S 千米, S 与 t 的函数关系如 1-4 图所示. 请问:

(1) 货车从 A 地到 B 地时行驶的速度是多少, a 表示什么?

(2) 货车从 B 地到 A 地返程中 S 与 t 的函数关系式.

解决问题知识要点: 从函数图像获取信息, 运用待定系数法求函数解析式.

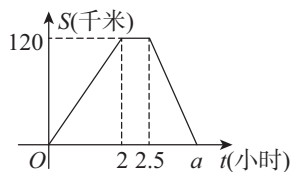


图 1-4



学习目标

理解函数的定义, 掌握简单函数的定义域、值域的求法和函数的表示法; 掌握函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性.



知识学习

1.2.1 函数的概念

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一非空集合, 如果存在某一对应法则 f , 使得对于 D 中每一个值 x 都有唯一的 y 值与之对应, 则称对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函数,

记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中称 x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域.

对于确定的 $x_0 \in D$, 与之对应的 y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$$

当 x 取遍 D 中的所有数值, 对应的函数值 y 的集合称为函数 $y = f(x)$ 的值域, 记作 ω , 即

$$\omega = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

由定义看出, 定义域与对应法则一旦确定, 函数也随之确定, 因此把函数的定义域和对应法则称为函数的两个基本要素.

由此, 只有当两个函数的对应法则和定义域都相同时, 这两个函数才是相同的.

对于实际问题而言, 函数的定义域由问题的实际意义来确定; 在不考虑实际意义时, 函数的定义域是使函数的解析式有意义的实数所构成的数集.

例 1 某服装厂有员工 6000 人, x 表示每天出勤的人数, 则每天的出勤率为 $y = \frac{x}{6000}$,

求此函数的定义域和值域.

解 定义域为 $\{x | 0 \leq x \leq 6000, x \in \mathbb{Z}\}$, 值域 $y \in [0, 1]$.

例 2 求函数 $y = \frac{1}{x-2} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解 依题意得

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 2$$

因此, 函数的定义域为 $[-2, 2)$.

例 3 求函数 $y = \frac{1}{\ln(x-1)} + \sqrt{3-x}$ 的定义域.

解 依题意得

$$\begin{cases} \ln(x-1) \neq 0 \\ x-1 > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 1 \\ x > 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 1 < x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x \leq 3$$

因此, 函数的定义域为 $(1, 2) \cup (2, 3]$.

例 4 求函数 $y = \lg(x^2 + 4x - 5)$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 则需

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ 或 } x < -5$$

即函数 y 的定义域是 $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

【注】 函数中记号对应法则 $f(\cdot)$ 具有广泛的含义, 可以由一个数学解析式表示, 也可



以由几个数学解析式(分段函数)表示,还可以由图形或表格表示,甚至可以由一段文字来描述.

例 5 已知函数 $f(x+1)=x^2+4x-3$, 求 $f(x)$, $f(0)$, $f(1)$.

解 作变量置换 $x+1=t$, 得 $x=t-1$, 将其代入函数中, 得

$$f(t)=(t-1)^2+4(t-1)-3=t^2+2t-6$$

因为函数关系与自变量的符号无关, 故由上式得

$$f(x)=x^2+2x-6, f(0)=-6, f(1)=-3$$

例 6 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & -2 < x \leq 0 \\ x^2+2, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

解 $f(-1)=e^{-1}$; $f(0)=e^0=1$; $f(1)=1^2+2=3$

例 7 判断下列函数是否为同一函数.

$$(1) f(x)=x+1, g(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \quad (2) f(x)=3\ln x, g(x)=\ln x^3$$

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 所以它们不是同一函数.

(2) 根据对数基本性质知, $\ln x^3 = 3\ln x$, 同时两个函数的定义域均为 $(0, +\infty)$, 故两个函数是相同函数.

1.2.2 函数的基本特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 定义域为区间 D , 如果存在正数 M , 使得对于 D 中任意的 x , 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上有界. 否则, 称函数 $f(x)$ 在区间 D 上无界.

函数 $y=\sin x$ 、 $y=\cos x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 是有界的, 无论 x 取何值, 都有 $|\sin x| \leq 1$ 和 $|\cos x| \leq 1$, 这里的 1 就是有界定义中的正数 M .

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于 I 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数在区间 I 内是单调递增的; 如果 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数在 I 内是单调递减的. 在定义域内单调增加或单调减少的函数统称为单调函数.

函数 $y=x+1$ 是单调递增函数; 函数 $y=1-x$ 是单调递减函数. 如图 1-5 所示.

函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 是单调递减的, 在 $(0, +\infty)$ 是单调递增的, $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 称为单调区间. 如图 1-6 所示.