第 7 章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系建立了平面上的点与二元有序实数对之间的一一对应关系，从而可以用代数的方法来研究几何问题，这为一元函数微积分学提供了直观的几何背景．空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的，并为研究多元函数微积分学提供直观的几何背景．

本章首先建立空间直角坐标系，然后介绍向量及向量的一些运算，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，进而介绍空间曲面和空间曲线的部分内容．

§7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系和空间点的坐标

过空间一定点 o，作三条相互垂直的数轴，它们都以点 o 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条轴分别称为 x **轴**（横轴）、y **轴**（纵轴）和 z **轴**（竖轴），统称为**坐标轴**．定点 o（有时使用大写字母 O ）称为**坐标原点**．

坐标轴的正向通常符合右手法则（如图 7-1 所示）：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正半轴以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正半轴时，大拇指所指方向就是 z 轴的正向．这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系．

在空间直角坐标系中，两条坐标轴确定的一个平面称为**坐标面**，分别称为 xoy **平面**、 yoz **平面**和 zox **平面**．通常取 xoy 平面位于水平位置， z 轴竖直向上．三个坐标面将空间分为 8 个部分，每一部分称为**卦限**，含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限称为**第 I 卦限**，其他 7 个卦限的编号分别用 II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示（如图 7-2 所示）．

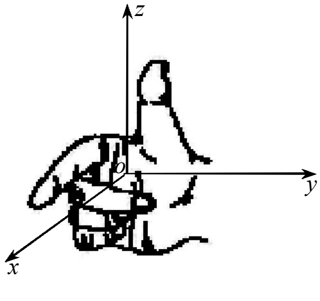

图 7-1

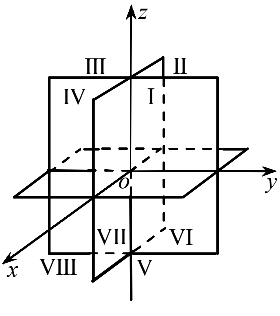

图 7-2

在空间直角坐标系中，如何来表示空间中的点的坐标呢？设M为空间一已知点，过M作三个分别垂直于x轴、y轴与z轴的平面，它们分别与x轴、y轴、z轴交于P、Q、R三点（如图7-3所示）．若P、Q、R在x轴、y轴、z轴的坐标依次为x、y、z，则由M就唯一地确定了一个三元有序实数组x,y,z；反过来，已知一个三元有序实数组x,y,z，则可在x、y、z轴上分别取坐标依次为x、y、z的点P、Q、R，再过点P、Q、R分别作x轴、y轴、z轴的垂直平面，这三个垂直平面的交点M便是由三元有序实数组x,y,z所确定的唯一的点．这样就建立了空间点M与三元有序实数组x,y,z之间的一一对应关系，我们把这组有序实数称为**点M的坐标**，记为$M(x,y,z)$，并依次称x、y、z为点M的横坐标、纵坐标、竖坐标．特别地，原点的坐标为$(0,0,0)$，x轴、y轴、z轴上的点的坐标分别具有$(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$的形式，xoy平面、yoz平面、zox平面上的点的坐标分别具有$(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$的形式．

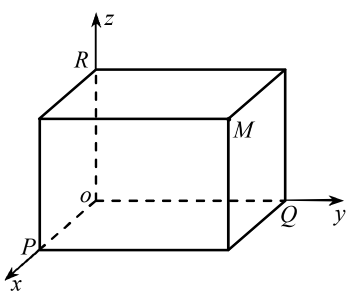

图 7-3

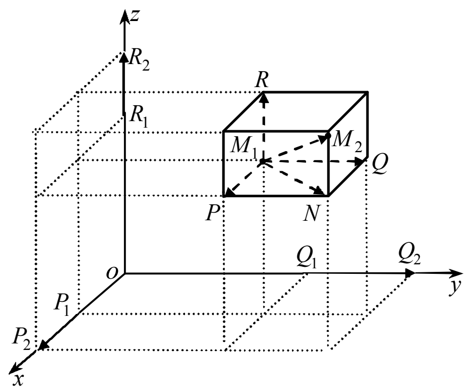

图 7-4

7.1.2　两点间的距离

已知空间两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$，如何求M_1和M_2之间的距离d呢？过M_1和M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体（如图 7-4 所示）．由于ΔM_1NM_2和ΔM_1PN均为直角三角形，因此

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 + |z_2-z_1|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\ . \tag{7-1}$$

公式（7-1）称为坐标为(x_1,y_1,z_1)与(x_2,y_2,z_2)的**空间两点间的距离公式**．

特别地，空间一点$M(x,y,z)$与原点$O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \tag{7-2}$$

例 7-1　在z轴上找一点M，使它与点$N(1,1,2)$的距离为$3\sqrt{2}$.

解　因为点M在z轴上，故可设其坐标为$(0,0,z)$，由公式（7-1），即得

$$|MN|^2=(1-0)^2+(1-0)^2+(2-z)^2=(3\sqrt{2})^2=18\ ,$$

即

$$z^2-4z-12=0\ ,$$

解得

$$z_1=-2,\ z_2=6\ .$$

故所求点有两个，坐标分别为$(0,0,-2)$和$(0,0,6)$.

例 7-2　证明：以$M_1(4,3,1)$、$M_2(1,1,0)$、$M_3(0,-2,2)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　因为

$$|M_1M_2|^2=(1-4)^2+(1-3)^2+(0-1)^2=14\ ,$$

$$|M_1M_3|^2=(0-4)^2+(-2-3)^2+(2-1)^2=42\ ,$$

$$|M_2M_3|^2=(0-1)^2+(-2-1)^2+(2-0)^2=14\ ,$$

所以

$$|M_1M_2|=|M_2M_3|=\sqrt{14}\ .$$

故$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形.

习题 7.1

1．在空间直角坐标系中作出具有下列坐标的点：
$A(2,3,4)$；$B(1,2,-1)$；$C(-2,2,2)$；$D(2,-2,-2)$.

2．指出下列各点位置的特殊性：
$A(2,0,0)$；$B(0,-3,0)$；$C(0,0,1)$；$D(-5,0,3)$；$E(3,2,0)$；$F(0,1,1)$.

3．在平面直角坐标系和空间直角坐标系中，一切$x=a$（a为常数）的点构成的图形分别是什么？

4．求点$M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

5．在z轴上求与点$A(-4,1,7)$和点$B(3,5,-2)$等距离的点C.

6．在yoz坐标面上，求与三个点$A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$、$C(0,5,1)$等距离的点的坐标.

7．求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

§7.2 向量的线性运算及向量的坐标

7.2.1 向量的概念

在实际问题中，像质量、温度、体积等这样只有大小，没有方向的量，我们称之为**数量**或**标量**．此外如物体运动速度、加速度、力和力矩等这样不仅有大小，而且有方向的量，我们称之为**向量**或**矢量**．

通常用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．

以 A 为始点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，也可用带箭头的小写字母 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 或黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 、$\boldsymbol{c}$ 等表示向量（如图 7-5 所示）．

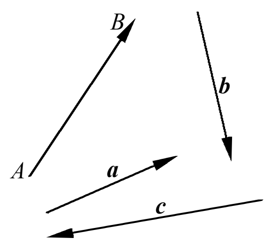

图 7-5

注 1：在手写向量时，一般使用上面带有箭头的形式，如 $\overrightarrow{AB}$ 、$\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 、$\vec{c}$ 等．

向量的大小叫做向量的**模**．向量 $\overrightarrow{AB}$ 、$\boldsymbol{a}$ 、$\vec{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$．模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$（或 $\vec{0}$）；零向量的方向是任意的．模等于 1 的向量称为**单位向量**，记作 $\boldsymbol{e}$（或 $\vec{e}$）．方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$．方向相同（或相反）的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为是平行的，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．方向相同且模相等的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为是**相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．显然，零向量与任何向量都是平行的．

注意，这里所说的方向相同（或相反）是指向量的指向相同（或相反），甚至可能在同一条直线上．因此，经过平行移动后能够完全重合的向量也是相等的，我们称它们为**同一个向量**，这样的向量与起点无关，可以在空间自由平移，故称为**自由向量**．在数学上，我们只研究这种与起点无关的自由向量．

注 2：我们通常使用 $\boldsymbol{i}$（或 $\vec{i}$）、$\boldsymbol{j}$（或 $\vec{j}$）、$\boldsymbol{k}$（或 $\vec{k}$）分别表示与 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向方向相同的单位向量，它们都称为**基本单位向量**．

7.2.2 向量的加法

两向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 始于同一点，作以 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形，则由始点到对角

顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 7-6 所示），这种方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

由向量相等的意义及平行四边形的性质，如果将 $\boldsymbol{b}$ 平行移动，使其始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则由 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也同样为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 7-7 所示），这种方法称为向量加法的**三角形法则**.

三角形法则还可以推广到求空间任意有限个向量的和：从第一个向量开始，依次把下一个向量的始点放在前一个向量的终点上，最后从第一个向量的始点到最末一个向量的终点的有向线段就是这些向量的和向量（如图 7-8 所示）. 这种方法叫做向量加法的**多边形法则**.

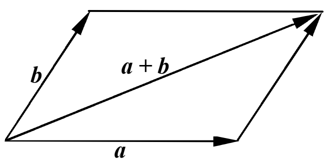

图 7-6

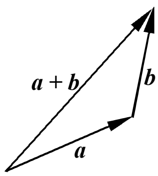

图 7-7

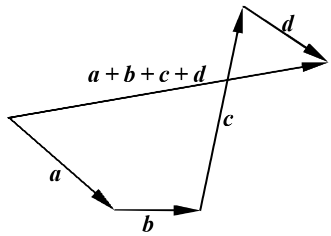

图 7-8

向量的加法具有下列性质：

① **交换律**： $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （7-3）

② **结合律**： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （7-4）

与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相等长度而方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{b}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$ 规定为向量 $\boldsymbol{b}$ 加上向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ ，即：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

称 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 之差（如图 7-9 所示）.

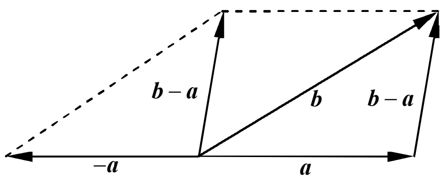

图 7-9

注 3：由平行四边形的性质，若两向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 始点重合，我们也可以将向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 理解为以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为始点，以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量. 这就是向量减法的**三角形法则**.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

由三角形的性质，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中，当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向或反向时等号成立.

7.2.3 数乘向量

向量$\boldsymbol{a}$与实数λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$，我们规定如下：

（1）$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量且当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

（2）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，即向量$\lambda\boldsymbol{a}$的长度为$|\lambda||\boldsymbol{a}|$（这里$|\lambda|$表示$\lambda$的绝对值）；

（3）若$\lambda>0$，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；

若$\lambda<0$，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反；

若$\lambda=0$，$\lambda\boldsymbol{a}$是零向量.

数乘向量满足下列运算规律：

①**结合律**：　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　（7-5）

②**第一分配律**：　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　（7-6）

③**第二分配律**：　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　（7-7）

其中，λ、μ为实数.

这些规律证明较简单，从略.

显然，非零向量$\boldsymbol{a}$的单位向量可写为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

向量的加法和数乘向量统称为**向量的线性运算**.

例 7-3 ΔABC中D、E是BC边上的三等分点，如图 7-10 所示，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 试用$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AE}$.

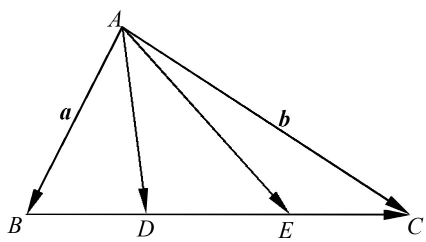

图 7-10

解　由向量减法的三角形法则，知

$$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

再由数乘向量，知

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

从而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}).$$

定理 7-1 向量$\boldsymbol{b}$平行于非零向量$\boldsymbol{a}$的充分必要条件是：存在唯一实数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 充分性．若存在唯一实数λ使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向（当$\lambda>0$时）或反向（当$\lambda<0$时）或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$（当$\lambda=0$时），因此必有$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

必要性．若$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取$|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则有

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向时λ取正值，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向时λ取负值，即有$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；又若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$，则有

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

从而$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$．因$|\boldsymbol{a}|\neq0$，故必有$|\lambda-\mu|=0$，即$\lambda=\mu$.

证毕.

7.2.4 向量的坐标

在直角坐标系中，以坐标原点O为始点，向空间一点M所引的向量$\overrightarrow{OM}$，叫做点M的**向径**，通常用$\boldsymbol{r}$表示.

设向径$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，终点为$M(x,y,z)$．自点$M$向$z$轴作垂线，垂足为$R$，自点$M$向$xoy$面作垂线，垂足为$M'$，再由$M'$分别向$x$轴、$y$轴作垂线，垂足分别为$P$、$Q$．由图 7-11，利用向量的加法及向量相等的意义，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OR},$$
$$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ},$$

所以有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

又由定理 7-1 知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

故有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

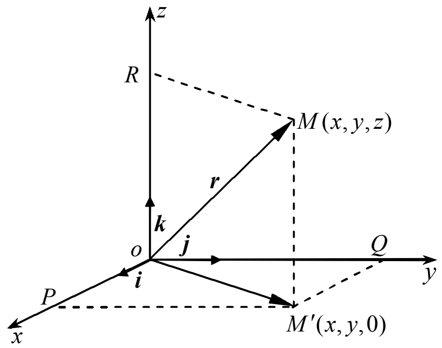

图 7-11

显然，向径与其终点 M 具有一一对应关系，即 $\boldsymbol{r}$ 与三元有序数组 x, y, z 之间存在一一对应关系，因此向径 $\boldsymbol{r}$ 由有序数组 x, y, z 唯一确定，我们把这个有序数组叫做向径的**坐标**，并记作

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) .$$

上式称为向径的**坐标表示式**.

在这里特别强调，一个点与该点的向径有相同的坐标，记号 (x, y, z) 既表示点 M ，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$ ，因此，求点 M 的坐标就是求向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 但要注意，在几何中，点与向量是两个不同的概念，不可混淆，在看到记号 (x, y, z) 时，必须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量，当 (x, y, z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x, y, z) 表示点时，就不能对它进行运算.

利用向径的坐标表示式，我们容易得到空间中任意向量的坐标表示式.

已知空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ，作以 M_1 为始点，M_2 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ （如图 7-12 所示），连接 $\overrightarrow{OM_1}$ 、 $\overrightarrow{OM_2}$.

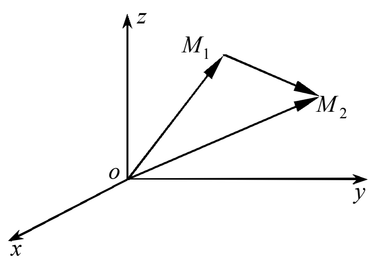

图 7-12

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} = (x_1, y_1, z_1) ,$$
$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} = (x_2, y_2, z_2) ,$$

于是

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\
&= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\ .
\end{aligned}
$$

综上所述，向量的坐标等于它终点与始点的对应坐标之差.

利用向量的坐标，可得向量在坐标轴上的投影及向量的线性运算.

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则称 a_x、a_y、a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上、y 轴上、z 轴上的**投影**，而称 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上、y 轴上、z 轴上的**投影分向量**. 利用向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律，有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}\ , \\
&\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k}\ , \\
&\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)\ , \\
\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)\ , \\
\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\ .
\end{gathered}
$$

这里 λ 为任意实数.

定理 7-1 指出，当向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b} // \boldsymbol{a}$，相当于 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z)\ .$$

这也相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}\ .$$

例 7-4　将点 $M_1(0,-1,3)$ 和 $M_2(2,3,-4)$ 间的线段分为三等份，求分点的坐标.

解　设分点依次为 $A(x_A, y_A, z_A)$、$B(x_B, y_B, z_B)$. 由于

$$(x_A - 0, y_A + 1, z_A - 3) = \overrightarrow{M_1A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(2,4,-7) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right),$$

因此

$$x_A = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3},\ y_A = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},\ z_A = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}\ .$$

同理，由于

$$(2 - x_B, 3 - y_B, -4 - z_B) = \overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(2,4,-7) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right),$$

因此

$$x_B = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3},\ y_B = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3},\ z_B = -4 + \frac{7}{3} = -\frac{5}{3}\ .$$

综上，分点坐标依次为 $A\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$、$B\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

我们下面用向量的坐标来表示它的长度和方向.

任给向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，作向径 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，则 $\overrightarrow{OM}=(a_x,a_y,a_z)$，点 M 的坐标为 (a_x,a_y,a_z)，因此 $|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|OM\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

为了表示向量的方向，先引进两向量夹角的概念．设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$，作向径 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$（设 $\varphi=\angle AOB$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**（如图 7-13 所示），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$．如果向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以是 0 与 π 之间的任意值.

特别地，若 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=90^\circ$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$）．显然，零向量与任何向量都互相垂直.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**（如图 7-14 所示），方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**．容易推得

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

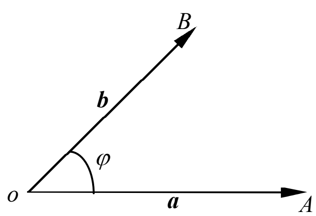

图 7-13

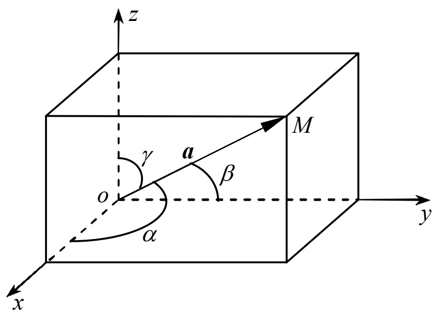

图 7-14

以及关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

显然，如果 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则有

$$\boldsymbol{a}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

这说明以 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向余弦为坐标的向量是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

例 7-5　已知两点 $M_1(-1,2,3)$ 和 $M_2(0,3,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及单位向量.

解　由$\overrightarrow{M_1M_2}=(0-(-1),3-2,2-3)=(1,1,-1)$知：

模为
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}\,,$$

方向余弦为
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}，\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}，\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

它的单位向量为$\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

例 7-6　已知向量$\boldsymbol{a}$的两个方向余弦为$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$、$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=3$，求向量$\boldsymbol{a}$.

解　由向量的方向余弦的关系$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$解得

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}\,,$$

则向量$\boldsymbol{a}$的坐标为

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=3\cdot\frac{1}{3}=1，\quad a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=3\cdot\frac{2}{3}=2\,,$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=\pm3\cdot\frac{2}{3}=\pm2\,.$$

于是所求向量为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\text{ 或 }\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\,.$$

习题 7.2

1．在平行四边形$ABCD$内，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$是该平行四边形对角线的交点．试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

2．求起点为$A(1,2,1)$，终点为$B(-19,-18,1)$的向量$\overrightarrow{AB}$与$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$的坐标表达式.

3．求常数λ使向量$\boldsymbol{a}=(\lambda,\ 1,\ 5)$与向量$\boldsymbol{b}=(2,\ 10,\ 50)$平行.

4．求点$M(1,\sqrt{2},1)$的向径$\overrightarrow{OM}$与坐标轴之间的夹角.

5．已知向量$\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$，试求：

（1）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$；　　　　（2）$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

6．已知两点$A(2,\ \sqrt{2},\ 5)$和$B(3,\ 0,\ 4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角.

7．求向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$在$x$轴上的投影和在$y$轴上的投影分向量．其中$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

8．一向量的终点为点$B(-2,\ 1,\ -4)$，它在x轴、y轴和z轴上的投影依次为3、-3和8，求这向量始点A的坐标.

9．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$、$\cos\beta=\dfrac{3}{7}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的方向角是钝角．求 $\cos\gamma$.

§7.3　向量的数量积和向量积

7.3.1　向量的数量积

先引入一个例子．设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从 M_1 移动到 M_2，即有位移 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{M_1M_2}$，若力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{S}$ 的夹角为 θ（如图 7-15 所示），则由物理学知，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\theta .$$

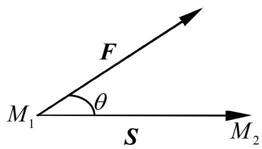

图 7-15

在数学上加以抽象，我们有如下定义：

定义 7-1　设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，称实数值 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称**点积**或**内积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) . \tag{7-8}$$

根据这个定义，上述问题中力所做的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{S}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S} .$$

由数量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$、$|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=90^\circ\Leftrightarrow\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0 .$$

由于零向量与任意向量都垂直，因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量的数量积满足下列运算规律：

①交换律：　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　（7-9）

②分配律：　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$　（7-10）

③关于数的结合律：　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　（7-11）

其中 λ 为实数.

例 7-7　试用向量证明三角形的余弦定理.

证　如图 7-16 所示，设在 ΔABC 中，$\angle BCA=\theta$，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$．要证 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$．

事实上，记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

从而

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

由 $|\boldsymbol{a}|=a$, $|\boldsymbol{b}|=b$, $|\boldsymbol{c}|=c$ 及 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$ 即可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$．

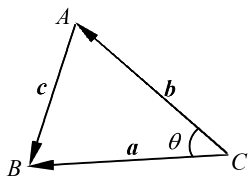

图 7-16

下面我们来推导向量的数量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位向量，故有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$，因而得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\qquad(7\text{-}12)$$

上式表示：两个向量的数量积等于它们对应坐标两两乘积之和．于是，我们有结论：向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$．

利用两个向量的数量积，可以求出它们夹角的余弦，即当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 非零时，

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.\qquad(7\text{-}13)$$

例 7-8　已知 ΔABC 的三个顶点为 $A(1,-1,0)$、$B(-1,0,-1)$、$C(3,4,1)$．试证

ΔABC 是直角三角形.

证 三角形三边所在向量为

$$\overrightarrow{AB}=(-1-1,0-(-1),-1-0)=(-2,1,-1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(3-(-1),4-0,1-(-1))=(4,4,2),$$
$$\overrightarrow{CA}=(1-3,-1-4,0-1)=(-2,-5,-1),$$

则有

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=(-2)\times(-2)+1\times(-5)+(-1)\times(-1)=0\ .$$

即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CA}$，所以 ΔABC 是直角三角形.

例 7-9 设向量 $\boldsymbol{a}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{j}$. 求以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线之间的不大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的夹角的余弦.

解 以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线所在的向量为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\right)+\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j}\right)=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\right)-\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{3}{2}\boldsymbol{j}\right)=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

它们之间不大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}=\frac{|2\times1+(-1)\times2+2\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{9}\ .$$

7.3.2 向量的向量积

前面我们讨论了向量的一种乘法运算，即数量积，数量积的运算结果是一个实数. 但在物理和工程领域中往往还需要向量的另一种乘法运算，运算结果不是一个实数，而是一个新的向量，这就是数学上两向量的向量积.

定义 7-2 两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{c}$ 由下列条件确定：

（1）$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

（2）$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

（3）$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的方向服从右手法则：平移 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 使其有共同的始点，当右手的四个手指从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的角度转向 $\boldsymbol{b}$ 握拳时，大拇指所指方向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向.

向量的向量积又称为向量的**叉积**（或**外积**），向量积的模的几何意义是：它的数值是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

由向量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

（2）若 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

事实上，当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0\quad\text{或}\quad(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$$

$$\Leftrightarrow\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

由于零向量与任意向量都平行，因此，上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量的向量积满足下列运算规律：

①反交换律：　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　（7-14）

②分配律：　$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，

$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$　（7-15）

③关于数的结合律：　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$　（7-16）

其中 λ 为实数.

下面我们来推导向量的向量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\&\quad a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$ 、$\boldsymbol{j}$ 、$\boldsymbol{k}$ 是两两互相垂直的单位向量，故有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$，因而得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_zb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了便于记忆，可借用行列式表示法表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.\qquad(7\text{-}17)$$

例 7-10　设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$. 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及以 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解　$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\2&3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}-1&1\\3&0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

根据向量积的模的几何意义，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模在数值上就是以 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行

四边形的面积．因而所求面积为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{77}\ .$$

例 7-11 求单位向量 $\boldsymbol{c}^\circ$， 使 $\boldsymbol{c}^\circ\perp\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{c}^\circ\perp\boldsymbol{b}$．其中 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$， $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k}$ ．

解 因为 $\boldsymbol{c}^\circ\perp\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{c}^\circ\perp\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{c}^\circ /\!/ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，

故

$$\boldsymbol{c}^\circ=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\ .$$

下面给出了空间三个向量共面的概念．

如果三个向量在一个平面上，或经过平行移动后能放在一个平面上，则称此三个向量**共面**．

显然，要判断三个向量 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$ 是否共面，只要看其中两个向量的向量积是否与第三个向量垂直．如果垂直，则三个向量共面，否则不共面，为此只需要计算 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的值．

一般地，我们称实数值 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$ 的**混和积**．

由此可得出结论：向量 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ ．

例 7-12 向量 $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 、 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 、 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 是否共面？

解 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\ ,$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})=4-2-2=0\ ,$$

故 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$ 共面．

结合公式（7-17）及三阶行列式的性质，我们有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

其中： $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$ ．

习题 7.3

1．已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 2)$ 、 $\boldsymbol{b}=(2,\ 2,\ 1)$ ，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦．

2．证明下列结论：

（1）向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(-1,\ 1,1)$ 垂直；

（2）向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

3．求与向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 、$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

4．已知向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ ，$\boldsymbol{b}\neq 0$ ．证明：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

5．已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ ，计算下列各式：

（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ ；　　（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ ；

（3）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ ；　　（4）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

§7.4　平面及其方程

7.4.1　平面的点法式方程

确定一个平面的条件很多，但在解析几何里最基本的条件是：平面经过一个定点且垂直于一个已知向量．以后我们将看到许多其他条件都可转化为这个基本条件.

垂直于平面的任一非零向量称为该平面的**法线向量**，简称**法向量**．显然一个平面的法向量有无穷多个且它们相互平行.

假设平面 Π 经过一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且其法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ ，下面来建立该平面的方程.

设点 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上任一点（如图 7-17 所示），则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面的法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直，于是 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$ ，即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (7\text{-}18)$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 (x,y,z) 所满足的方程.

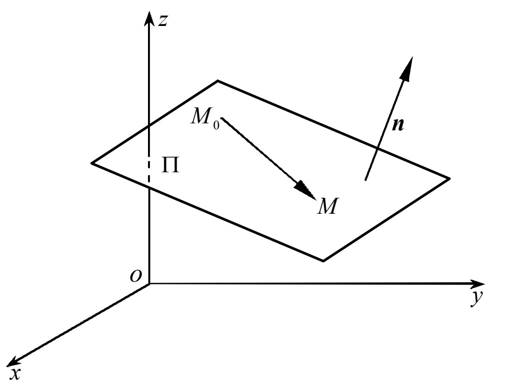

图 7-17

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 必不垂直，从而 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ ，即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 (x,y,z) 不满足方程（7-18）.

由此可知，方程（7-18）要作为平面 Π 的方程必须满足两个条件：一是平面 Π 上任一点 M 的坐标 (x,y,z) 都满足方程（7-18）；二是不在平面 Π 上的点的坐标都不满足方程（7-18）.

由于方程（7-18）是由平面上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 确定的，所以方程（7-18）叫做平面的**点法式方程**.

由于平面的法线向量有无穷多个，如果我们取平面 Π 的另一个法线向量 $\boldsymbol{n}_1$，方程（7-18）的形式会不会改变呢？

其实，由 $\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_1$ 知

$$\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}=\lambda(A,B,C)=(\lambda A,\lambda B,\lambda C)\quad(\lambda\neq 0),$$

又由 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$ 得

$$\lambda A(x-x_0)+\lambda B(y-y_0)+\lambda C(z-z_0)=0\,. \tag{*}$$

消去 λ 后（*）式与方程（7-18）完全相同，这说明在求平面方程的点法式方程时，法向量可以在该平面所有法线向量中任意选取.

例 7-13　求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$、$M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

解　先找该平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$，由于向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，而 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$、$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$，故可取所求平面的法线向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&4&-6\\-2&3&-1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\,,$$

由式（7-18）得，所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0\,,$$

即

$$14x+9y-z-15=0\,.$$

7.4.2　平面的一般式方程

从平面的点法式方程（7-18）可以得到

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0\,,$$

令 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$，则得

$$Ax+By+Cz+D=0\,. \tag{7-19}$$

这说明平面方程是关于 x、y、z 的一次方程.

反过来，设 A、B、C 不同时为零，则形如（7-19）的关于 x、y、z 的一次方程都表示一个平面．事实上，任取满足（7-19）的一组实数 x_0,y_0,z_0，有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\,,$$

将式（7-19）与上式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,.$$

这就是过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且具有法线向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 的平面的点法式方程．这说明任一 x, y, z 的一次方程均表示一个平面．

方程（7-19）称为平面的**一般式方程**，向量 (A, B, C) 是该平面的一个法线向量．

例如，方程

$$2x + 3y - z + 5 = 0$$

表示一个平面，向量 $(2, 3, -1)$ 是这个平面的一个法线向量．

对于式（7-19），存在着以下几种特殊情况：

① 当 $D = 0$ 时，有 $Ax + By + Cz = 0$，方程表示一个经过原点的平面．反之亦然．

② 当 $A = 0$ 时，有 $By + Cz + D = 0$，法线向量 $\boldsymbol{n} = (0, B, C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面；同样，$Ax + Cz + D = 0$ 和 $Ax + By + D = 0$ 分别表示平行于 y 轴和 z 轴的平面．反之亦然．

③ 当 $A = B = 0$ 时，有 $Cz + D = 0$ 或 $z = -\dfrac{D}{C}$，法线向量 $\boldsymbol{n} = (0, 0, C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于坐标面 xoy 的平面；同样，方程 $Ax + D = 0$ 和 $By + D = 0$ 分别表示平行于坐标面 yoz 和 zox 的平面．反之亦然．

例 7-14　求过点 $M_1(1, -1, 2)$、$M_2(-1, 0, 3)$ 且平行于 z 轴的平面方程．

解法一　因为平面平行于 z 轴，故可设平面方程为

$$Ax + By + D = 0,$$

因为 M_1、M_2 在平面上，所以有

$$\begin{cases} A - B + D = 0 \\ -A + D = 0 \end{cases},$$

解得 $A = D,\ B = 2D$，故所求平面方程为

$$Dx + 2Dy + D = 0,$$

约去 D（$D \neq 0$，否则 $A = B = 0$）有

$$x + 2y + 1 = 0.$$

解法二　设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$ 且 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{k}$，从而可取

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},$$

取定点 $M_1(1, -1, 2)$，所以所求平面方程为

$$(x - 1) + 2(y + 1) + 0(z - 2) = 0,$$

即

$$x + 2y + 1 = 0.$$

例 7-15　已知平面经过坐标轴上的 3 个定点 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$、$R(0, 0, c)$，求此平面的方程（这里 a、b、c 都不为零）．

解　设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

因为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$ 三点都在该平面内，所以有

$$\begin{cases}Aa+D=0\\Bb+D=0,\\Cc+D=0\end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{D}{a}$，$B=-\dfrac{D}{b}$，$C=-\dfrac{D}{c}$，将其代入方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 并约去 D（$D\neq 0$，否则 $A=B=C=0$），便得所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{7-20}$$

方程（7-20）称为平面的**截距式方程**，其中 a、b、c 分别称为平面在 x、y、z 轴上的**截距**（如图 7-18 所示）.

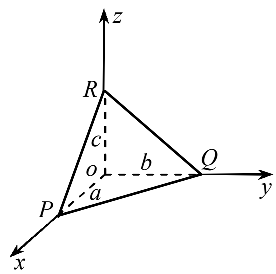

图 7-18

7.4.3　两平面的夹角

两平面的法向量的夹角 θ（$0\leqslant\theta\leqslant 90°$）称为两平面的**夹角**. 各取两平面的一个法线向量，它们之间的夹角若不是两平面之间的夹角，就是两平面之间夹角的**补角**，所以不论哪种情况，两平面的夹角余弦等于两个法线向量夹角余弦的绝对值.

设平面 Π_1 和 Π_2 的夹角为 θ，它们的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则由 Π_1 和 Π_2 的法向量夹角的余弦公式，容易得出它们夹角余弦的计算公式为：

$$\cos\theta==\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

利用定理 7-1 的结果及两向量垂直的充要条件，我们容易得到结论：

（1）平面 Π_1 和 Π_2 平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；